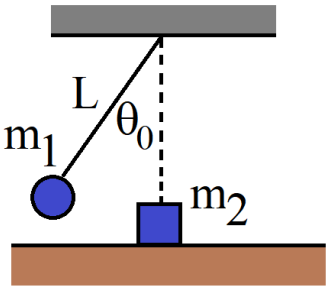
Control 3

Fecha: 22 de Noviembre de 2024

1. Se suelta una masa m_1, desde el reposo, suspendida por una cuerda ideal de largo L en un ángulo θ_0. Ésta choca con una masa m_2 inicialmente en reposo, con un coeficiente de restitucion e. Plantee sus resultados en terminos de $L,\ \theta_0,\ m_1,\ m_2,\ e$ y g.

   a. Calcule la velocidad de m_2 despues del choque v_2'.**[4 ptos.]**.

   b. Calcule la velocidad de m_1 despues del choque v_1'.**[2 ptos.]**.



(a)
Resolviendo por energia, se encuentra la velocidad de m_1 antes del choque:

$$(L - L\cos\theta_0)\ m_1\ g = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

$$v_1 = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)} \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Con esta info ahora es plantear el choque:
conservacion de momenutm

$$m_1\ v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad \textbf{[1 pto.]}$$

Y plantear la definicion de coeficiente de restitucion, considerando la velocidad con que se alejan las masas:

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1} \quad \textbf{[1 pto.]}$$

ocupando estas dos ultimas ecuaciones se puede encontrar las velocidades en terminos de los datos del comienzo $L,\ \theta_0,\ m_1,\ m_2$:

$$v_2' = m_1 v_1 \frac{1+e}{m_1+m_2} \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

$$v_2' = m_1\sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}\,\frac{1+e}{m_1+m_2} \quad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

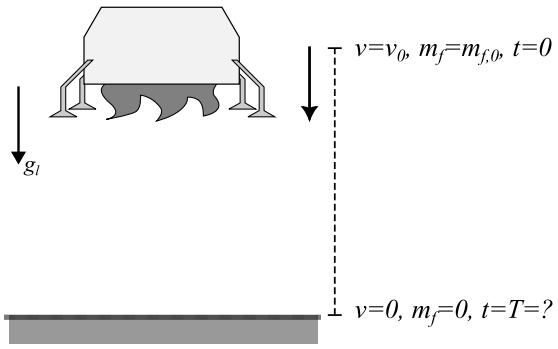
(b)

$$v_1' = v_1 \frac{m_1 - m_2 e}{m_1+m_2} \quad \textbf{[1 pto.]}$$

$$v_1' = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}\,\frac{m_1 - m_2 e}{m_1+m_2} \quad \textbf{[1 pto.]}$$

■

2. Un módulo lunar de masa M (sin contar combustible) desciende verticalmente afectado por una aceleración de gravedad g_l. El módulo quema combustible y lo expulsa con rapidez relativa constante u, de tal manera que el módulo disminuye su rapidez a una **tasa constante**. Además, se sabe que en un tiempo $t = 0$ el módulo lleva una rapidez v_0 y una masa $m_{f,0}$ de combustible. Si el módulo llega a la superficie con rapidez cero y sin combustible, encuentre el tiempo T que transcurre desde $t = 0$.



Las variables conocidas son M, $m_{f,0}$, g_l, u, y v_0. Recuerde que:

$$\int \frac{dx}{x+a} = \ln(x+a) + \text{cte.}$$

La ecuación de movimiento para el sistema de masa variable es:

$$F + v_{\text{rel}}\dot{m} = ma. \qquad \textbf{[1 pto.]}$$

La masa total del sistema, módulo más combustible, es

$$m(t) = M + m_f(t), \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

donde $m_f(t)$ es la masa del combustible en el tiempo. Entonces, tenemos que $\dot{m} = dm_f/dt$ **[0.5 ptos.]**. Además, por enunciado ya tenemos que $v_{\text{rel}} = -u$ **[0.5 ptos.]**, donde hemos utilizado que la dirección positiva va hacia arriba.

La única fuerza en acción es el peso, por tanto

$$F = -m(t)g_l = -(M + m_f(t))g_l. \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Finalmente, debido a que la aceleración del módulo es constante, podemos escribir:

$$a = a_0 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-(-v_0)}{T} = \frac{v_0}{T}. \qquad \textbf{[1 pto.]}$$

Remplazando todo lo anterior en la ecuación de movimiento:

$$-(M + m_f(t))g_l - u\frac{dm_f(t)}{dt} = (M + m_f(t))a_0$$

$$-u\frac{dm_f(t)}{dt} = (M + m_f(t))(g_l + a_0)$$

$$\int_{m_{f,0}}^{0} \frac{dm_f}{M + m_f} = -\frac{g_l + a_0}{u}\int_0^T dt, \qquad \textbf{[1 pto.]}$$

donde hemos utilizado que en el instante inicial $m_f(t = 0) = m_{f,0}$ y que en en el instante final $m_f(t = T) = 0$. Al integrar obtenemos

$$\ln\left(\frac{M}{M + m_{f,0}}\right) = -\frac{g_l + a_0}{u}T. \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Al remplazar $a_0 = v_0/T$, podemos finalmente despejar T:

$$T = \frac{u}{g}\ln\left(\frac{M + m_{f,0}}{M}\right) - \frac{v_0}{g}. \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

■