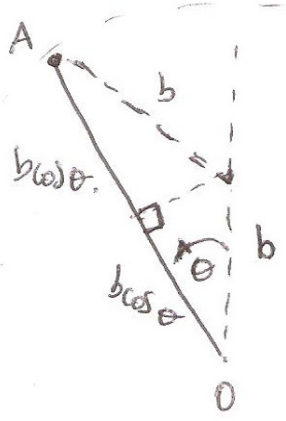
Solución Ayudantía 2

Pregunta 1

Trabajemos en coordenadas polares



Se genera un triangulo isoceles, por lo que le al trazo donde le base a la mitad.

La aceleración en coordenadas polares es descrita como:

$$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

Entonces debemos instanciar los valores

Nos damos cuenta en primera instancia que ρ corresponde al largo del brazo, entonces:

$$\rho = 2b\cos\theta \Rightarrow \dot{\rho} = -2b\dot{\theta}\sin\theta \quad \text{pero} \quad \dot{\theta} = k$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} = -2bk\sin\theta.$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} = -2bk^2\cos\theta.$$

y en cuanto a θ sabemos que $\dot{\theta} = k$ y como $\dot{\theta}$ es una constante $\ddot{\theta} = 0$. Reemplazemos los valores conocidos en la aceleración.

$$\vec{a} = (-2bk^2\cos\theta - 2b\cos\theta k^2)\hat{\rho} + (2\cdot(-2bk\sin\theta)k)\hat{\theta}$$

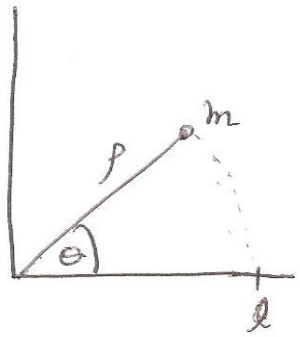
$$\vec{a} = -4bk^2\cos\theta\hat{\rho} - 4bk^2\sin\theta\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -4bk^2(\cos\theta\hat{\rho} + \sin\theta\hat{\theta})$$

Calculando el módulo obtenemos

$$|\vec{a}| = 4bk^2$$

Pregunta 2



Para la posición debemos encontrar ρ, para ello nos fijamos que nos entregan $\dot{\rho}(t) = \beta$, Así:

$$\frac{d\rho}{dt} = \beta \Rightarrow d\rho = \beta\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho' = \beta \int_0^t dt'$$

$$\rho - \rho_0 = \beta t \quad \text{con} \quad \rho_0 = \rho(t=0) = \ell$$

$$\rho - \ell = \beta t \Rightarrow \rho = \beta t + \ell$$

Así $\boxed{\vec{r}(t) = (\beta t + \ell)\hat{\rho}}$

Para la velocidad utilizemos $\vec{v}(t) = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$ necesitemos solo encontrar $\dot{\theta}$, para ello utilizemos que $\ddot{\theta}(t) = \alpha$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = \alpha \Rightarrow d(\dot{\theta}) = \alpha\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} d(\dot{\theta}') = \alpha \int_0^t dt'$$

$$\dot{\theta} - \dot{\theta}_0 = \alpha t \quad \text{con} \quad \dot{\theta}_0 = \dot{\theta}_0(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \alpha t$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = \beta\hat{\rho} + \alpha t(\beta t + \ell)\hat{\theta}}$$

Para la aceleración $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}$

Solo nos falta indicar que $\ddot{\rho} = 0$, pues $\dot{\rho} = \beta = cte.$

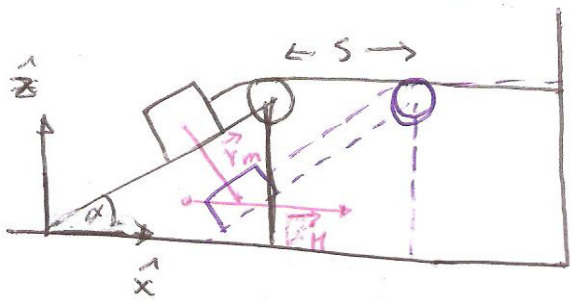
$$\vec{a} = -\rho\dot{\theta}^2\hat{\rho} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -(\beta t + \ell)(\alpha t)^2\hat{\rho} + (2\beta\alpha t + (\beta t + \ell)\alpha)\hat{\theta}$$

$$\boxed{\vec{a} = -(\alpha t)^2(\beta t + \ell)\hat{\rho} + (3\beta\alpha t + \ell\alpha)\hat{\theta}}$$

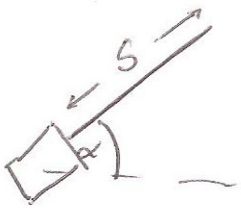
Pregunta 3

Veamos primero que cosas ocurren si hacemos que la cuña se desplace una distancia S hacia la derecha.



Tratemos de determinar el vector $\vec{r}_m$ que indica el desplazamiento de la masa m.

Notemos en primer lugar que lo que se desplazó la cuña se tuvo que mover la cuerda que está sujeta a la masa m.



Por lo tanto en el eje x la masa m se mueve una distancia $S\cos\alpha$ hacia la izquierda, pero a ello hay que sumarle los S que se mueve la cuña hacia la derecha.

$$r_{mx} = S - S\cos\alpha$$

En cuanto al eje y el bloque m se mueve $S\sin\alpha$ hacia abajo.

$$r_{my} = -S\sin\alpha.$$

Así: $\vec{r}_m = s(1-\cos\alpha)\hat{x} - s\sin\alpha\hat{y}$

Ahora si tomemos en cuenta el desplazamiento de la cuña ($\vec{r}_H$): $\vec{r}_H = s\hat{x}$.

Obtuvemos ahora las respectivas aceleraciones.

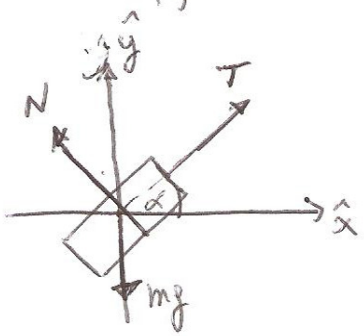
$$\ddot{\vec{r}}_m = \ddot{s}(1-\cos\alpha)\hat{x} - \ddot{s}\sin\alpha\hat{y}$$

$$\ddot{\vec{r}}_H = \ddot{s}\hat{x} = a\hat{x}$$ donde a es la aceleración que pretendemos calcular.

Entonces se obtiene que la aceleración del bloque m depende de la aceleración de la cuña en la forma:

$$\ddot{\vec{r}}_m = a(1-\cos\alpha)\hat{x} - a\sin\alpha\hat{y}$$

Si nos fijemos en las fuerzas que actúan sobre el bloque:



N: la fuerza que ejerce la cuña sobre el bloque

T: fuerza de la cuerda sobre el bloque (Tensión).

mg: Peso.

Tendremos:

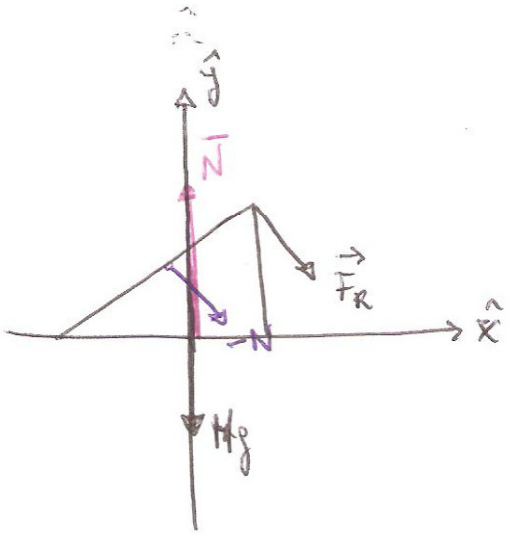
$$\vec{F}_m = (T\cos\alpha - N\sin\alpha)\hat{x} + (T\sin\alpha + N\cos\alpha - mg)\hat{y}$$

Utilizando la 2da Ley de Newton $\vec{F}_m = m\ddot{\vec{r}}_m$ tendremos:

$$T\cos\alpha - N\sin\alpha = a(1-\cos\alpha)m \quad (1)$$

$$T\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = -a\sin\alpha\, m \quad (2)$$

Hasta ahora tenemos 2 ecuaciones que relacionan 3 incógnitas. N, T y a. Para encontrar la otra ecuación debemos observar las fuerzas que actúan sobre la cuña.



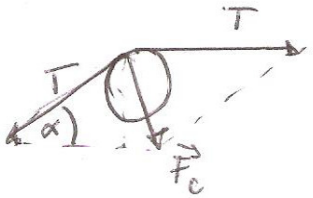
$\vec{N}$: Fuerza que ejerce el suelo sobre la cuña (Normal)

F_R: Fuerza que ejerce la roldana sobre la cuña.

$-N$: Fuerza que ejerce el bloque sobre la cuña.

Mg: Peso de la cuña.

Para conocer $\vec{F}_R$ observemos ahora fuerzas que ~~ejer~~ se ejercen sobre la roldana. $\vec{F}_R$ será la misma fuerza que ejercen las cuerdas sobre la roldana.



$$\vec{F}_c = (-\cos\alpha + 1)T\hat{x} - T\sin\alpha\,\hat{y}$$

Entonces todas las fuerzas sobre la cuña serán:

$$\vec{N} = \bar{N}\hat{y} \;;\; \vec{F}_R = (1-\cos\alpha)T\hat{x} - T\sin\alpha\,\hat{y}$$

$$-\vec{N} = N\sin\alpha\,\hat{x} - N\cos\alpha\,\hat{y} \;;\; \vec{P}_M = -Mg\,\hat{y}$$

Así la $\vec{F}_M$ sobre la cuña estará dada por:

$$\vec{F}_M = \left[N\sin\alpha + (1-\cos\alpha)T\right]\hat{x} + \left[\bar{N} - T\sin\alpha - N\cos\alpha - Mg\right]\hat{y}$$

Como la cuña solo se mueve en dirección x, utilizamos la 2da Ley de Newton en esa dirección:

$$N\sin\alpha + (1-\cos\alpha)T = Ma. \qquad (3)$$

Con lo que tenemos nuestra tercera ecuación.

Sumamos (1) y (3):

$$T = ma(1-\cos\alpha) + Ma \quad (4)$$

y tomamos $(1)\cdot\cos\alpha + (2)\sin\alpha$ ::

$$T = mg\sin\alpha + am\cos\alpha - am\cos^2\alpha - am\sin^2\alpha$$

$$T = mg\sin\alpha + ma(\cos\alpha - 1) \quad (5)$$

y tomando (4) = (5) y despejando.

$$ma(1-\cos\alpha) + Ma = mg\sin\alpha + ma(\cos\alpha - 1)$$

$$2ma(1-\cos\alpha) + Ma = mg\sin\alpha$$

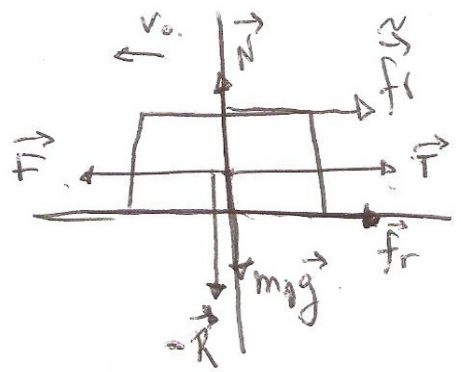
$$a\left[M + 2m(1-\cos\alpha)\right] = mg\sin\alpha$$

$$\boxed{a = \frac{mg\sin\alpha}{M + 2m(1-\cos\alpha)}}$$

Pregunta 4

En primer lugar observemos las fuerzas que actúan sobre cada bloque.

B_1



$\vec{N}$: Fuerza que ejerce el suelo sobre el bloque B_1

$\vec{T}$: Tensión de la cuerda.

$\vec{F}$: Fuerza sobre B_1. (Incógnita).

$-\vec{R}$: Fuerza del bloque B_2 sobre B_1

$m_1\vec{g}$: Peso.

$\vec{f}_r$: Roce con el suelo

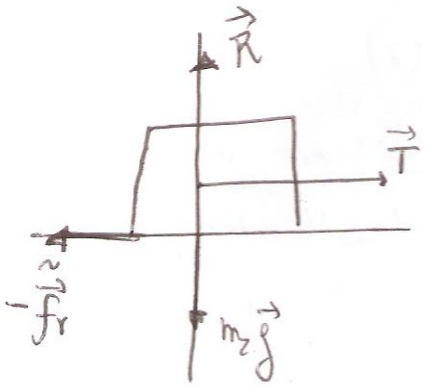
$\vec{f}_1$: Roce con B_2

Entonces:

$$\vec{F}_1 = \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} - \vec{R} + m_1\vec{g} + \vec{f}_r + \vec{f}_r$$

$$\vec{F}_1 = (T - F + \mu N + \mu R)\hat{x} + (N - m_1 g - R)\hat{y}$$

B_2



$\vec{R}$: Fuerza del bloque B_1 sobre B_2

$\vec{T}$: Tensión de la cuerda

$m_2\vec{g}$: Peso.

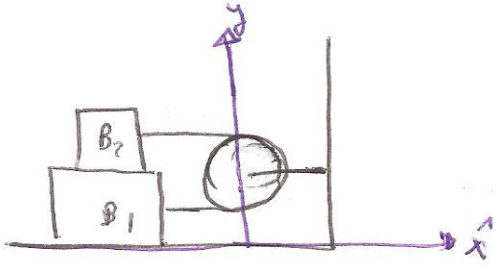
$-\vec{f}_r$: Roce con B_1

Entonces:

$$\vec{F}_2 = \vec{R} + \vec{T} + m_2\vec{g} - \vec{f}_r$$

$$\vec{F}_2 = (T - \mu R)\hat{x} + (R - m_2 g)\hat{y}$$

Ahora si colocamos el sistema de referencia en la polea.



y llamos x_1 y x_2 a las coordenadas de B_1 y B_2 respectivamente podemos encontrar algunas restricciones.

Por ejemplo si llamamos L al largo de la cuerda, entonces $-(x_1 + x_2) = L$ entonces como la cuerda no cambia su largo $-(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = 0 \Rightarrow \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0$

$\Rightarrow \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 0$. Como $\dot{x}_1 = v_0 = cte \Rightarrow \ddot{x}_1 = 0$

$\Rightarrow \ddot{x}_2 = 0$

Utilizemos entonces la segunda ley de Newton en el eje x, para ambos bloques:

B_1 $$T - F + \mu N_1 + \mu R = m_1 \ddot{x}_1 = 0 \quad (1)$$

B_2 $$T - \mu R_1 = m_2 \ddot{x}_2 = 0 \quad (2)$$

y como ningún bloque se mueve en el eje y; entonces $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = 0$. y hacemos Segunda Ley de Newton.

B_1 $$N - m_1 g - R = 0 \quad (3)$$

B_2 $$R - m_2 g = 0 \quad (4)$$

de (4) $R = m_2 g$ y reemplazando en (3) $N = (m_1 + m_2) g$

(2) - (1):

$$F - 2\mu R - \mu N = 0$$

$$F = 2\mu R + \mu N$$

$$F = \mu (2R + N) = \mu (2m_2 g + (m_1 + m_2) g)$$

$$\Rightarrow \boxed{F = \mu g (3m_2 + m_1)}$$