Estática y Dinámica - FIS-1513 Sección 1

Interrogación I1

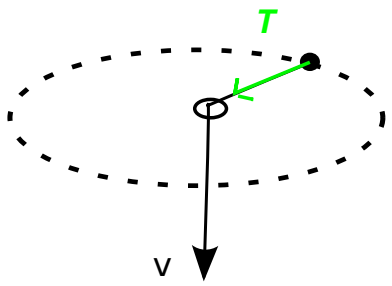
Miércoles 12 de Abril de 2011 .

Instrucciones

1. Tiene 2 horas para resolver los siguientes problemas.
2. Resuelva cada uno de ellos en hojas separadas. Sea claro y ordenado.
3. Escriba con lápiz pasta, de lo contrario perderá el derecho a recorrección.
4. Todos los problemas tienen el mismo peso en la nota final.

Problema 1

Una masa m amarrada a un cordel que pasa por un aro central gira como se muestra en la figura. Inicialmente el círculo tiene radio r_0 y la masa gira con velocidad angular ω_0. Se tira el cordel hacia abajo con velocidad constante v de modo que se disminuye el radio del círculo. Desprecie la gravedad.



a) (2 puntos) Haga un diagrama de las fuerzas sobre m y escriba la ecuación de movimiento para m en coordenadas polares.

b) (2 puntos) Calcule la frecuencia angular $\omega(t)$. Ayuda: Observe que

$$\frac{d(\rho^2\dot{\theta})}{dt} = \rho^2\ddot{\theta} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}.$$

c) (2 puntos) Calcule la tensión en la cuerda como función del tiempo.

Solución:

a) La única fuerza que actúa sobre la partícula es la tensión T de la cuerda, que es radial, $\vec{T} = -T\hat{\rho}$ dirigida desde la partícula hacia el centro del anillo.

La ecuación de movimiento de m es entonces

$$m[(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\hat{\theta}] = -T\hat{\rho}.$$

b) La componente $\hat{\theta}$ de la ecuación anterior es

$$\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 0.$$

La ayuda nos indica que conviene multiplicar por ρ para obtener

$$\frac{d(\rho^2\dot{\theta})}{dt} = 0$$

de donde se deduce que

$$\rho^2\dot{\theta} = \ constante = r_0^2\omega_0,$$

en que hemos usado que el valor constante es su valor inicial.

Por otro lado nos dicen que la cuerda se tira con rapidez constante por lo que el radio está dado por

$$\rho(t) = r_0 - vt.$$

Reemplazando este valor de $\rho(t)$ en la fórmula anterior resulta

$$\omega(t) = \dot{\theta} = \frac{r_0^2\omega_0}{\rho^2} = \frac{r_0^2\omega_0}{(r_0 - vt)^2}.$$

c) La tensión se calcula a partir de la componente radial de la ecuación de movimiento dada en a).

$$T = -m(\ddot{\rho} + \rho\dot{\theta}^2)$$

Como $\rho(t) = r_0 - vt$, $\ddot{\rho} = 0$, de modo que

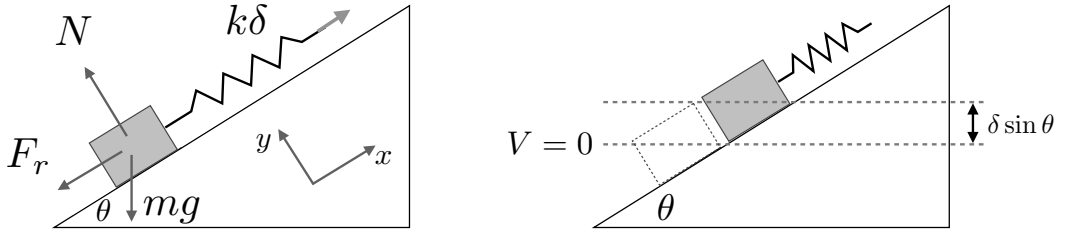
$$T = \frac{mr_0^4\omega_0^2}{(r_0 - vt)^3}.$$

Problema 2

Un bloque de masa m descansa sobre un plano inclinado θ grados sobre la horizontal. El bloque está unido a un resorte de constante k. Los coeficientes de roce estático y cinético entre el bloque y el plano son μ_e y μ_c, respectivamente. Se tira el resorte lentamente hacia arriba hasta que el bloque empieza a moverse.

a) (3 puntos) Calcule el estiradamiento δ del resorte justo cuando el bloque comienza a moverse.

b) (3 puntos) Determine el valor μ_c para el cual el bloque se detiene justo cuando el resorte está en su largo natural.



Solution

a) Cuando el bloque está apunto de moverse, es claro que la fuerza de roce es contraria a la fuerza ejercida por el resorte. Considerando el diagrama de fuerzas de la figura, la ecuación de Newton en el instante anterior al movimiento del bloque es,

$$-F_r\hat{i} - mg\sin\theta\hat{i} + k\delta\hat{i} + N\hat{j} - mg\cos\theta\hat{j} = 0. \tag{1}$$

Por componentes tenemos que,

$$-F_r - mg\sin\theta + k\delta = 0 \qquad y \qquad N - mg\cos\theta = 0 \tag{2}$$

En el instante en que el bloque está apunto de moverse, la fuerza de roce ha alcanzado su máximo valor,

$$F_{r,max} = \mu_e N = \mu_e mg\cos\theta \tag{3}$$

Luego, el estiramiento del resorte viene dado por,

$$k\delta = F_{r,max} + mg\sin\theta \qquad \rightarrow \qquad \delta = k^{-1}mg\cos\theta(\mu_e + \tan\theta). \tag{4}$$

b) Cuando el bloque comienza a moverse, el roce entre las superficies es dinámico. Para que el bloque se detenga justo cuando el resorte alcanza su largo natural, la velocidad del bloque debe ser nula. Podemos resolver este problema por energía considerando que esta no se conserva ya que el bloque experimenta una fuerza de roce dinámica. Por lo tanto,

$$\Delta E = E_f - E_i = W_{nc} \tag{5}$$

donde W_{nc} es el trabajo realizado por la fuerza de roce. Si fijamos la referencia para la energía potencial cuando el bloque comienza a moverse, tenemos que la energía inicial E_i y final E_f son,

$$E_i = \frac{k\delta^2}{2} \qquad y \qquad E_f = mg\delta\sin\theta \tag{6}$$

Entonces,

$$mg\delta \sin\theta - \frac{k\delta^2}{2} = \int_0^{\delta} -N\mu_c = -\mu_c N\delta = -\mu_c \delta mg\cos\theta \tag{7}$$

Despejando μ_c, tenemos que

$$\mu_c = \frac{\frac{k\delta^2}{2} - mg\delta\sin\theta}{mg\cos\theta\delta} = \frac{k\delta}{2mg\cos\theta} - \tan\theta \tag{8}$$

Reemplazando la expresión para δ, obtenemos finalmente que,

$$\mu_c = \frac{\mu_e - \tan\theta}{2}. \tag{9}$$

Problema 3

Una barra de largo L y masa despreciable puede girar libremente con respecto al punto O (ver figura). En el extremo superior de la barra se encuentra atada una partícula de masa m, mientras que un resorte está unido al punto medio de la barra. El otro extremo del resorte se encuentra atado a un mecanismo de manera que el resorte siempre se encuentra horizontal. El resorte se encuentra en su largo natural cuando $\theta = 0$.

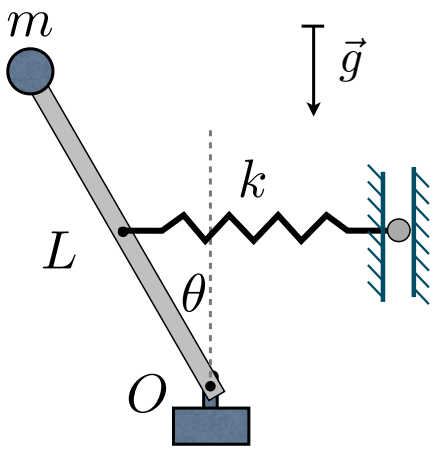
a) (1 punto) Calcule la energía potencial $V(\theta)$ y cinética $K(\dot{\theta})$ del sistema.

b) (1 punto) Encuentre los puntos de equilibrio del sistema.

c) (2 puntos) Evalue la estabilidad para cada uno de los puntos de equilibrio y especifique que condiciones debe satisfacer m, L y k para que al menos uno de los puntos de equilibrio sea estable.

d) (1 punto) Calcule la frecuencia para pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio estable.

e) (1 punto) Grafique el potencial $V(\theta)$ cuando existe al menos un punto de equilibrio estable para θ entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Identifique los puntos de equilibrio.



Solución

a) Si elegimos el punto O como origen de nuestro sistema de referencia, la energía potencial y cinética están dadas por

$$V(\theta) = mgL\cos\theta + \frac{k}{2}\left(\frac{L\sin\theta}{2}\right)^2 \tag{10}$$

$$K(\dot{\theta}) = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(L\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \tag{11}$$

b) Para encontrar los puntos de equilibrio resolvemos $\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta} = 0$,

$$\frac{\partial V(\theta)}{\partial\theta} = (-mgL + \frac{kL^2}{4}\cos\theta)\sin\theta = 0 \tag{12}$$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio son

$$\theta_{e1} = 0 \qquad \theta_{e2} = +\cos^{-1}\left(\frac{4mg}{kL}\right) \qquad \theta_{e3} = -\cos^{-1}\left(\frac{4mg}{kL}\right) \tag{13}$$

Notar que para que existan los puntos de equilibrio $\theta_{e2,3}$, $4mg < kL$.

c) Para que los puntos de equilibrio sean estables deben satisfacer $\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2} > 0$.

$$\frac{\partial^2 V(\theta)}{\partial\theta^2} = -mgL\cos\theta + \frac{kL^2}{4}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \tag{14}$$

Para el punto de equilibrio $\theta_{e,1} = 0$, tenemos que

$$\frac{\partial^2 V(\theta_{e,1}=0)}{\partial\theta^2} \quad = \quad -mgL + \frac{kL^2}{4} \tag{15}$$

El punto de equilibrio es estable si $4mg < kL$. Para analizar la estabilidad de los otros puntos de equilibrio notamos que,

$$\frac{\partial^2 V(\theta_{e2,3})}{\partial\theta^2} \quad = \quad -\frac{kL^2}{4}\left(1-\cos^2\theta_{e2,3}\right) < 0 \tag{16}$$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio $\theta_{e2,3}$ son siempre inestables.

d) La frecuencia para pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio estable $\theta = 0$ está dada por.

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}(\theta=0)}{\alpha}} = \sqrt{\frac{-mgL+\frac{kL^2}{4}}{mL^2}} = \sqrt{\frac{k}{4m}\left(1-\frac{4mg}{kL}\right)} \tag{17}$$

donde $\alpha = mL^2$ está dado por la energía cinética $K = \frac{1}{2}\alpha\dot{\theta}^2$.

e) Cuando existe el punto de equilibrio estable $\theta = 0$, el gráfico del potencial debe contener tres puntos en los cuales la pendiente es nula.

