PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física
FIS1514 — Dinámica
Segundo Semestre 2025
Profesores: Rafael Benguria, Jaime Clark, Pablo León, Iván Muñoz,
Rodrigo Soto, Diego Teca y Alejandro Varas

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Interrogación 1

5 de septiembre 17:30-19:30 hrs

Reglas generales:

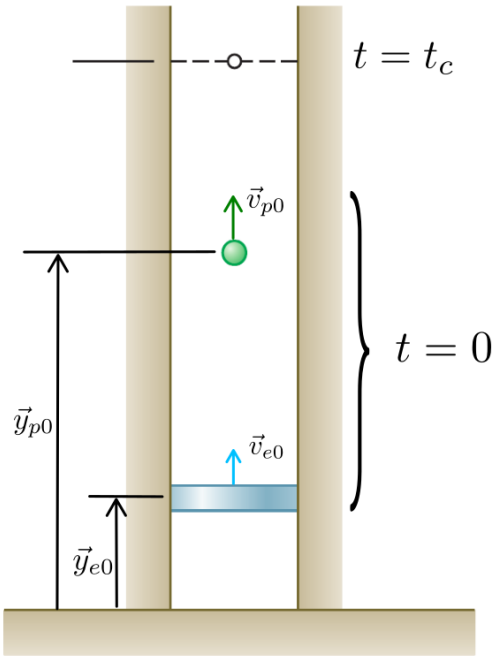
1. Escriba su nombre y RUT de manera clara y legible en cada hoja.
2. El tiempo para responder es 120 minutos.
3. Durante el desarrollo de la interrogación no hay consultas.
4. Está prohibido el uso de calculadoras, celulares, tablets, etc.
5. Está permitido el uso de lápiz mina, pero pierde el derecho a recorrección.
6. Cualquier acto vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

Nombre: _____

RUT: _____

Problema 1 [6 puntos]

Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde una altura $y_{p0} = 12{,}5\,\text{m}$ (con respecto al fondo del pozo) en el pozo de un elevador con una rapidez inicial $v_{p0} = 18\,\text{m/s}$. En el mismo instante un elevador de plataforma pasa por el nivel $y_{e0} = 5\,\text{m}$ (con respecto al fondo del pozo) moviéndose hacia arriba, con una rapidez constante $v_{e0} = 5{,}5\,\text{m/s}$.



Indicación: Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.

(a) Determine el instante t_c en el que la plataforma alcanza a la pelota **(2 pts)**.

(b) Determine la velocidad de la pelota al momento de ser alcanzada por la plataforma **(2 pts)**.

(c) Determine la altura (con respecto al fondo del pozo) a la que la plataforma alcanza a la pelota **(2 pts)**.

Nombre: _____

RUT: _____

Desarrollo:

a) La posición de la pelota está dada por:

$$y_p(t) = y_{p0} + v_p\, t - \frac{1}{2} g t^2, \quad \textbf{(0,5pts)}$$

y la posición del elevador por:

$$y_e(t) = y_{e0} + v_e\, t. \quad \textbf{(0,5pts)}$$

El encuentro ocurre cuando en $t = t_c$, cuando $y_p(t_c) = y_e(t_c)$, es decir:

$$y_{p0} + v_p t - \frac{1}{2} g t^2 = y_{e0} + v_e t, \quad \textbf{(0,3pts)}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$\boxed{t_c = \frac{(v_p - v_e) \; + \; \sqrt{(v_p - v_e)^2 + 2g\,(y_{p0} - y_{e0})}}{g}.} \quad \textbf{(0,5pts)}$$

Usando los valores del problema, se tiene que:

$$\boxed{t_c = 3\,\text{s}.} \quad \textbf{(0,2pts)}$$

donde se ha descartado la solución $t_c = -0{,}5\,\text{s}$.

b) La velocidad de la pelota en $t = t_c$ está dada por:

$$\begin{aligned} v_p(t) &= v_p - g t_c, \quad \textbf{(0,6pts)} \\ &= v_p - \left[(v_p - v_e) + \sqrt{(v_p - v_e)^2 + 2g\,(y_{p0} - y_{e0})}\right], \quad \textbf{(0,6pts)} \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{v_p(t_c) = v_e - \sqrt{(v_p - v_e)^2 + 2g\,(y_{p0} - y_{e0})}}. \quad \textbf{(0,6pts)}$$

Usando los valores del problema:

$$\boxed{v_p(t_c) = -12\,\text{m/s},} \quad \textbf{(0,2pts)}$$

es decir, el encuentro ocurre mientras la pelota está cayendo.

c) La altura del encuentro ocurre en un tiempo $t = t_c$ **(0.4 pts)**, por lo tanto:

$$y_e(t_c) = y_{e0} + v_e t_c, \quad \textbf{(0,4pts)}$$

es decir:

$$\boxed{y_e(t_c) = y_{e0} + \frac{v_e}{g}\left[(v_p - v_e) + \sqrt{(v_p - v_e)^2 + 2g\,(y_{p0} - y_{e0})}\right].} \quad \textbf{(0,8pts)}$$

Usando los valores del problema:

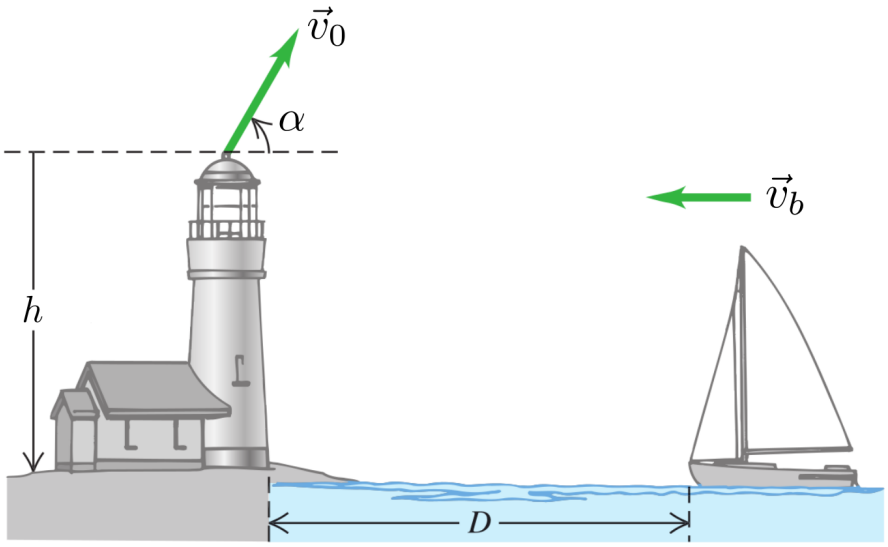
$$\boxed{y_e(t_c) = 21{,}5\,\text{m/s}.} \quad \textbf{(0,4pts)}$$

Nombre: _____

RUT: _____

Problema 2 [6 puntos]

Conforme un barco se acerca al muelle con velocidad constante $\vec{v}_b$, es necesario lanzarle la pieza de un equipo importante para que pueda atracar. El equipo se lanza con una velocidad $\vec{v}_0$ en un ángulo α por encima de la horizontal desde lo alto de una torre en la orilla del agua, a una altura h por encima de la cubierta del barco.



(a) ¿Cuánto tiempo se demora la pieza en tocar el agua? **(2 pts)**

(b) Para que el equipo caiga enfrente del barco, ¿a qué distancia D del muelle debería estar el barco cuando se lance el equipo? **(2.5 pts)**

(c) ¿Cuál es el vector velocidad relativa de la pieza respecto al barco? **(1.5 pts)**

Desarrollo:

(a) Tomando como eje de referencia el nivel del mar y la localización del faro, tenemos que la posición de la pieza está dada por

$$y(t) = h + v_0 \sin(\alpha)\, t - \tfrac{1}{2} g t^2. \tag{1}$$

Cuando la pieza toca el agua, $y(t_c) = 0$, por lo que se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para t_c:

$$\tfrac{1}{2} g t_c^2 - v_0 \sin(\alpha)\, t_c - h = 0, \tag{2}$$

cuya solución viene dada por

$$t_c = \frac{v_0 \sin(\alpha) \pm \sqrt{(v_0 \sin(\alpha))^2 + 2gh}}{g}. \quad \textbf{(1pts)} \tag{3}$$

Como $t_c > 0$, la solución física es

$$t_c = \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{(v_0 \sin(\alpha))^2 + 2gh}}{g}. \quad \textbf{(1pts)} \tag{4}$$

(b) Denotemos como $x_p(t)$ y $x_b(t)$ las posiciones en el eje x de la pieza y del barco, respectivamente. Del apartado (a), podemos calcular cuál será el recorrido total en x de la pieza al tiempo t_c:

$$x_p(t_c) = v_0 \cos(\alpha)\, t_c. \quad \textbf{(0,5pts)} \tag{5}$$

Por otra parte, para el barco tenemos

$$x_b(t_c) = D - v_b\, t_c. \quad \textbf{(0,5pts)} \tag{6}$$

La condición para que la pieza caiga justo frente al barco es $x_p(t_c) = x_b(t_c)$, lo que implica

$$v_0 \cos(\alpha)\, t_c = D - v_b\, t_c, \tag{7}$$

de donde podemos despejar D:

$$D = (v_0 \cos(\alpha) + v_b)\, t_c. \quad \textbf{(1,5pts)} \tag{8}$$

Sustituyendo la expresión de t_c hallada en (a), se obtiene

$$D = \frac{v_0 \cos(\alpha) + v_b}{g} \left(v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{(v_0 \sin(\alpha))^2 + 2gh} \right). \tag{9}$$

(c) Consideremos un sistema de referencia en el suelo y otro sobre el barco. Respecto al suelo, el vector velocidad de la pieza está dado por

$$\vec{v}_p(t) = v_{px}\, \hat{i} + v_{py}\, \hat{j} = v_0 \cos(\alpha)\, \hat{i} + \big(v_0 \sin(\alpha) - gt\big)\, \hat{j}. \quad \textbf{(0,25pts)} \tag{10}$$

Mientras que el vector velocidad del barco es

$$\vec{v}_b(t) = -v_b \hat{i}. \quad \textbf{(0,25pts)} \tag{11}$$

Si denotamos como $\vec{v}_{pb}(t)$ al vector velocidad de la pieza con respecto al barco, se cumple

$$\vec{v}_p(t) = \vec{v}_{pb}(t) + \vec{v}_b(t), \tag{12}$$

de donde obtenemos

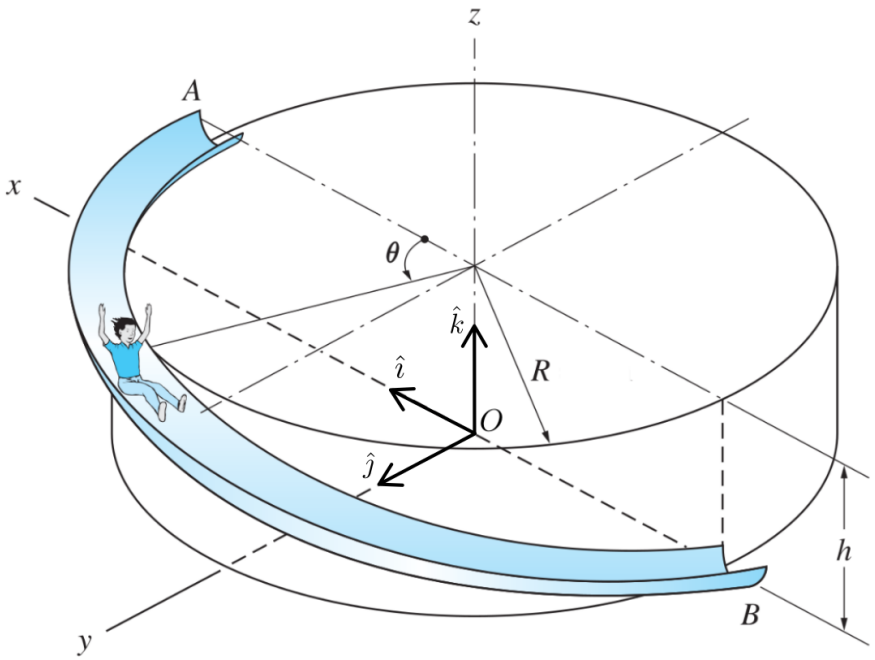
$$\vec{v}_{pb}(t) = \vec{v}_p(t) - \vec{v}_b(t) = \big(v_0 \cos(\alpha) + v_b\big)\, \hat{i} + \big(v_0 \sin(\alpha) - gt\big)\, \hat{j}. \quad \textbf{(1pts)} \tag{13}$$

Nombre: _____

RUT: _____

Problema 3 [6 puntos]

Un niño se desliza hacia abajo en el tobogán helicoidal AB. La descripción del movimiento en coordenadas cilíndricas es $R = 4\,\text{m}$, $\theta = \alpha t^2/2$ y $z = h[1 - (\alpha t^2/2\pi)]$, donde $h = \pi\,\text{m}$ y $\alpha = \frac{\pi}{8}\ \text{rad/s}^2$.



(a) Determine la magnitud de la velocidad cuando el niño está en B **(2 pts)**.

(b) Determine el vector aceleración (usando el sistema de referencia mostrado en la figura) cuando el niño está en B **(2 pts)**.

(c) Encuentre el vector velocidad media (usando el sistema de referencia mostrado en la figura) entre el punto A y B **(2 pts)**.

Nombre: _____

RUT: _____

Desarrollo: Considerar que se puede haber usado la notación $\hat{x} = \hat{i},\ \hat{y} = \hat{j}, \hat{r} = \hat{\rho}$

a) Por la geometría del problema conviene utilizar coordenadas cilíndricas considerando el radio constante. La posición, velocidad del niño para todo tiempo será:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z},\ \vec{v} = \rho\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}, \quad \textbf{(0,2pts)} \tag{14}$$

Del enunciado se puede ver que:

$$\dot{\theta} = \alpha t,\ \dot{z} = -\frac{h\alpha}{\pi}t, \tag{15}$$

Llamemos $t = t^*$ el tiempo que tarda el niño en ir de A a B. El punto A esta en $z(0) = h$ y el punto B en $z(t^*) = 0$, por lo tanto:

$$z(t^*) = h\left(1 - \frac{\alpha t^{*2}}{2\pi}\right) = 0 \Rightarrow t^* = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} = 4\text{s} \quad \textbf{(0,3pts)} \tag{16}$$

donde hemos descartado la solución negativa para t^*. Entonces, el punto B posee:

$$\theta_B \equiv \theta(t^*) = \pi,\ \dot{\theta}_B = \sqrt{2\pi\alpha},\ \ z_B = 0,\ \dot{z}_B = -h\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}, \quad \textbf{(0,2 pts por cada ecuación)} \tag{17}$$

y la velocidad en el punto B será:

$$\vec{v}_B = \rho\dot{\theta_B}\hat{\theta}_B + \dot{z}_B\hat{z} = \rho\sqrt{2\pi\alpha}\hat{\theta}_B - h\sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}}\hat{z} \quad \textbf{(0,2pts)} \tag{18}$$

De aquí se ve que el modulo de la velocidad es

$$\boxed{|\vec{v}_B| = \sqrt{2\pi\alpha\rho^2 + h^2\frac{2\alpha}{\pi}} = \frac{\sqrt{17}\pi}{2}\frac{\text{m}}{\text{s}}} \quad \textbf{(0,5pts)} \tag{19}$$

b) La aceleración del niño es:

$$\vec{a} = \rho\ddot{\theta}\hat{\theta} - \rho\dot{\theta}^2\hat{\rho} + \ddot{z}\hat{z} \quad \textbf{(0,2pts)} \tag{20}$$

donde

$$\ddot{\theta} = \alpha,\ \ddot{z} = -\frac{h\alpha}{\pi} \quad \textbf{(0,2pts)} \tag{21}$$

Entonces, en el punto B se tiene:

$$\dot{\theta}_B = \sqrt{2\pi\alpha},\ \ddot{\theta}_B = \alpha,\ \ddot{z} = -\frac{h\alpha}{\pi} \quad \textbf{(0,6pts)} \tag{22}$$

y la aceleración es:

$$\vec{a}_B = \rho\alpha\hat{\theta}_B - 2\pi\alpha\rho\hat{\rho}_B - \frac{h\alpha}{\pi}\hat{z} \quad \textbf{(0,3pts)} \tag{23}$$

Utilizando $\hat{\rho} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}$ y $\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}$ es facil ver que:

$$\hat{\rho}_B = -\hat{x},\ \hat{\theta} = -\hat{y} \quad \textbf{(0,2pts)} \tag{24}$$

Finalmente, la aceleración en el punto B es:

$$\boxed{\vec{a}_B = -\rho\alpha\hat{y} + 2\pi\alpha\rho\hat{x} - \frac{h\alpha}{\pi}\hat{z} = \pi^2\hat{x} - \frac{\pi}{2}\hat{y} - \frac{\pi}{8}\hat{z}} \quad \textbf{(0,5pts)} \tag{25}$$

c) El vector velocidad media entre los puntos A y B será:

$$\vec{v}_{\text{promedio}} = \frac{\vec{r}_b - \vec{r}_A}{t^*} \quad \textbf{(0,2pts)} \tag{26}$$

donde

$$\vec{r}_A = 4\hat{\rho}_A + 4\hat{z} = 4\hat{x} + 4\hat{z} \quad \textbf{(0,5pts)}, \quad \vec{r}_B = 4\hat{\rho}_B = -4\hat{x} \quad \textbf{(0,5pts)} \tag{27}$$

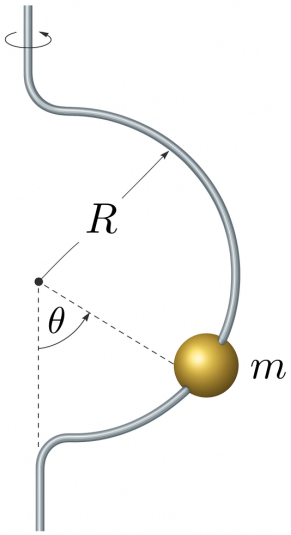
Usando $t^* = 4\text{s}$ **(0,3pts)** se encuentra

$$\boxed{\vec{v}_{\text{promedio}} = -\frac{8\hat{x} + \pi\hat{y}}{4} = -2\hat{x} - \frac{\pi}{4}\hat{y}} \quad \textbf{(0,5pts)} \tag{28}$$

Nombre: _____

RUT: _____

Problema 4 [6 puntos]



Una pequeña perlita de masa m se desliza sin roce a lo largo de un alambre semicircular, de radio R, como el que se muestra en la figura. El alambre rota alrededor del eje vertical con una velocidad angular constante ω.

(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la perlita **(2 pts)**.

(b) Considere ahora que la perlita permanece estacionaria con respecto al alambre (θ constante). Determine la magnitud de la fuerza que ejerce el alambre sobre la pelotita (como función de m, g y θ) **(2 pts)**.

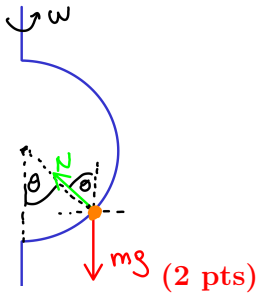
(c) Encuentre el ángulo θ (como función de R, g y ω) para el cual la perlita permanece estacionaria con respecto al alambre **(2 pts)**.

Nombre: _____

RUT: _____

Desarrollo:

(a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la perlita **(2 pts)**.



(2 pts)

(b) Considere ahora que la perlita permanece estacionaria con respecto al alambre (θ constante). Determine la magnitud de la fuerza que ejerce el alambre sobre la pelotita (como función de m, g y θ) **(2 pts)**.

Escribamos la segunda ley de Newton en la dirección vertical z **(0,5 pts)**.

$$F_z = m\ddot{z} \quad \textbf{(0,5pts)}$$

$$N\cos\theta - mg = 0 \implies \boxed{N = \frac{mg}{\cos\theta}} \quad \textbf{(1pto)}$$

(c) Encuentre el ángulo θ (como función de R, g y ω) para el cual la perlita permanece estacionaria con respecto al alambre **(2 pts)**.

Para este inciso usamos coordenadas cilíndricas, donde el eje vertical (de rotación) es el eje z y la coordenadas radial y angular en el plano horizontal son ρ y ϕ respectivamente. Escribimos la segunda ley en la dirección $\hat{\rho}$:

$$\begin{aligned} F_\rho &= ma_\rho \\ -N\sin\theta &= m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \\ -N\sin\theta &= m(0 - R\sin\theta\omega^2) \quad \textbf{(0,5pts)} \end{aligned}$$

donde usamos que si θ es constante (perlita estacionaria con respecto al alambre) entonces $\rho = R\sin\theta$ es constante y $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. Además como el alambre rota con velocidad angular constante ω, entonces $\dot{\phi} = \omega$. De la ecuación anterior tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} N\sin\theta &= mR\sin\theta\omega^2 \\ \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta &= mR\sin\theta\omega^2 \quad \textbf{(0,5pts)} \\ \implies &\boxed{\sin\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{R\omega^2}{g}\right) = 0} \quad \textbf{(0,5pts)} \end{aligned}$$

Si $\frac{R\omega^2}{g} > 1$, entonces el ángulo para el cual la perlita permanece estacionaria es:

$$\boxed{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{g}{R\omega^2}\right)} \quad \textbf{(0,5pts)}$$