PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Dinámica
Primer Semestre 2019

Nombre: _____

RUT: _____ N lista: _____

Interrogación 01
Preguntas de desarrollo

Duración total: 150 minutos

Reglas generales:

1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
5. Cualquier acto vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

Reglas específicas a las preguntas de desarrollo:

1. Está permitido el uso de lápiz mina en las preguntas de desarrollo, pero pierde el derecho a recorrección.

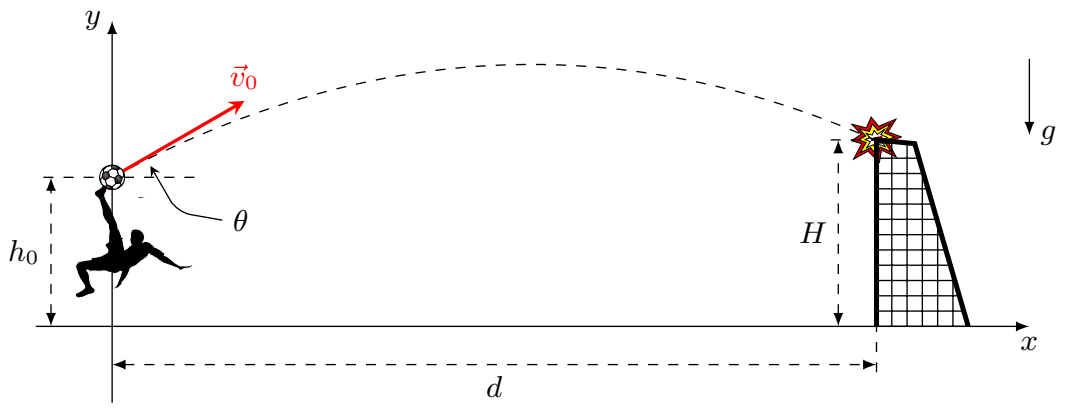
Nombre: _____

RUT: _____

N lista: _____

Problema 1 [6 puntos]

En un partido de fútbol, un jugador realiza una *chilenita* justo cuando se encuentra de frente al arco a una distancia de d. Desgraciadamente el tiro impacta en el travesaño del arco. El tiro realizado por el jugador fue a una altura h_0, con *ángulo de elevación* θ y el arco tiene una altura H.



Determine:

1. La rapidez inicial v_0 con que el jugador disparó el balón [2.5 puntos].
2. La distancia (medida desde el jugador) a la cual la altura del balón es máxima [2 puntos].
3. El tiempo que tarda el balón en impactar el travesaño [1.5 punto].

Solución:

1. Las ecuaciones de movimiento del balón son

$$x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t \tag{1}$$

$$y(t) = h_0 + v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{g}{2}t^2 \tag{2}$$

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - gt \qquad \text{[0.5 puntos]}$$

La rapidez inicial v_0 se obtiene usando que en algún instante de tiempo t el balón golpea en el travesaño ($x = d$, $y = H$). Reemplazando en las ecuaciones de posición dadas en (1) y (2) obtenemos:

$$d = v_0 \cos\theta \cdot t \ , \quad H = h_0 + v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{g}{2}t^2 \qquad \text{[0.5 puntos]}$$

Este es un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas v_0 y t (tiempo en que impacta el travesaño). Podemos resolver, despejando v_0 de la primera ecuación y reemplazando en la segunda

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\theta} \quad \Longrightarrow \quad H = h_0 + d\tan\theta - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \qquad \text{[1.0 puntos]}$$

que despejando v_0 conduce a

$$v_0 = \frac{d}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(h_0 + d\tan\theta - H)}} \qquad \text{[0.5 puntos]}$$

2. Despejando t de la ecuación (1) en términos de x y reemplazando en la ecuación (2) obtenemos la ecuación de la trayectoria $y(x)$:

$$y(x) = h_0 + \tan\theta \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \qquad \text{[1.0 puntos]}$$

La altura máxima que alcanza el balón ocurre en x tal que $dy/dx = 0$. Derivando la ecuación anterior e igualando a cero obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\theta - \frac{gx}{v_0^2\cos^2\theta} = 0 \implies x = \frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}\tan\theta = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{2g} \qquad \text{[0.5 puntos]}$$

Reemplazando la expresión de v_0 del inciso anterior obtenemos:

$$x = \frac{d^2\tan\theta}{2(h_0 + d\tan\theta - H)} \qquad \text{[0.5 puntos]}$$

3. El tiempo que tarda el balón está simplemente dado por

$$t = \frac{d}{v_0\cos\theta} \qquad \text{[0.5 puntos]}$$
$$= \sqrt{\frac{2(h_0 + d\tan\theta - H)}{g}} \qquad \text{[1.0 puntos]}$$

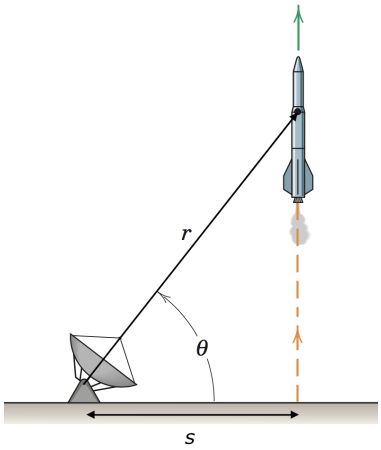
Problema 2 [6 puntos]

Un cohete se lanza verticalmente y es monitoreado por una estación de radar, tal como se presenta en la figura. Al respecto conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la relación entre la rapidez radial $\dot{r}$ y la rapidez angular $\dot{\theta}$ del cohete en términos de θ y r, durante el movimiento vertical? [2 puntos].

2. ¿Cuál es la expresión para la velocidad total del cohete en términos de $\dot{\theta}$, r y s, durante el movimiento vertical? [2 puntos].

3. Al llegar a una altura h desde el suelo, el cohete repentinamente se inclina y comienza a realizar un movimiento circunferencial con rapidez angular constante κ alrededor del radar. Calcule la aceleración total en esta etapa del movimiento en términos de h. [2 puntos]



Solución:

Un cohete que se lanza verticalmente y es monitoreado por un radar, tal como se presenta en la figura. Al respecto conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la relación entre la rapidez radial $\dot{r}$ y la rapidez angular $\dot{\theta}$ del cohete en términos de θ y r, durante el movimiento vertical?

   Analizando el triángulo de la figura, donde s es constante, se llega a que $\dot{r} = r\dot{\theta}\tan(\theta)$.

2. Cuál es la expresión para la velocidad total del cohete en términos de $\dot{\theta}$, r y s, durante el movimiento vertical? (2 puntos)

   $\dot{\vec{R}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = r\dot{\theta}\left[\tan(\theta)\hat{r} + \hat{\theta}\right] = r\dot{\theta}\left[\frac{\sqrt{r^2-s^2}}{s}\hat{r} + \hat{\theta}\right]$

3. Al llegar a una altura h desde el suelo, el cohete repentinamente se inclina y comienza a realizar un movimiento circunferencial con rapidez angular constante κ alrededor del radar. Calcule la aceleración total en esta etapa del movimiento en términos de h y κ? (2 puntos)

   $\ddot{\vec{R}} = \left[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right]\hat{r} + \left[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right]\hat{\theta} = -r\kappa^2\hat{r} = -\sqrt{h^2+s^2}\kappa^2\hat{r}$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Instituto de Física & Escuela de Ingeniería
FIS1513 / ICE1513 — Dinámica
Primer Semestre 2019

Interrogación 01 - Alternativas

Duración total: 150 minutos

Reglas generales:

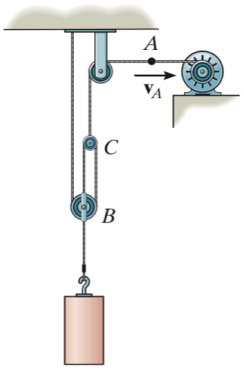
1. Escriba su nombre, RUT, y sección, de manera clara y legible.
2. Está prohibido el uso de aparatos electrónicos: calculadora, celulares, etc.
3. Se debe firmar el acta de asistencia y mostrar su TUC o cédula de identidad al momento de firmar.
4. **No se aceptan preguntas de ningún tipo**. Si cree que hay algún error, déjelo claramente explicado al final de la prueba.
5. Cualquier acto vaya en contra del *código de honor* se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

Reglas preguntas de selección múltiple:

1. Debe **seleccionar una sola respuesta** en las preguntas de selección múltiple. Para ello debe rellenar completamente el círculo de la respuesta seleccionada (de lo contrario su respuesta se considerará inválida). Los cálculos y desarrollo de las preguntas de selección múltiple no se consideran.
2. En las preguntas de selección múltiple: **las respuestas incorrectas descuentan** 1/4 **de punto**.
3. Al finalizar la interrogación, entregue únicamente la hoja de respuestas (no entregue este cuadernillo).

Problema 1 [1 punto]

El cable A está siendo tirado por un motor con velocidad $v_A = 6$ m/s. Considerando que la distancia entre el bloque y la polea B es fija, determine la velocidad del bloque que cuelga verticalmente.



a) 2 m/s hacia arriba

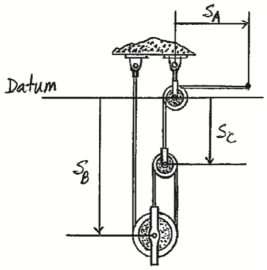
b) 3 m/s hacia arriba

c) 4 m/s hacia arriba

d) 6 m/s hacia arriba

e) 8 m/s hacia arriba

Solución



La posición del punto A y las poleas B y C satisfacen

$$s_B + 2(s_B - s_C) = l_1 \Rightarrow 3s_B - 2s_C = l_1 \tag{1}$$

y

$$s_C + s_A = l_2 \tag{2}$$

donde l_1 y l_2 con constantes.

Tomando la derivada con respecto al tiempo se tiene

$$3v_B - 2v_C = 0 \tag{3}$$

y

$$v_C + v_A = 0 \tag{4}$$

Eliminando v_C entre ambas ecuaciones se tiene

$$3v_B + 2v_A = 0 \tag{5}$$

Si $v_A = 6$ m/s, entonces $v_B = -\frac{2}{3}v_A = -4$ m/s $= 4$ m/s hacia arriba.

Problema 2 [1 punto]

Una partícula se mueve en el plano a lo largo de una curva dada por la expresión $x^2 = 16y$, donde x e y están medidas en metros. La coordenada x varía con el tiempo de acuerdo a la expresión $x(t) = 4t^2 - 2$, donde t está medido en segundos.

¿Cuáles son los vectores de velocidad y aceleración de la partícula para $t = 2$ s?

a) $\vec{v} = 16\hat{i} + 28\hat{j}$ m/s, $\quad \vec{a} = 8\hat{i} + 46\hat{j}$ m/s^2

b) $\vec{v} = 28\hat{i} + 16\hat{j}$ m/s, $\quad \vec{a} = 8\hat{i} + 46\hat{j}$ m/s^2

c) $\vec{v} = 16\hat{i} + 7\hat{j}$ m/s, $\quad \vec{a} = 8\hat{i} + 46\hat{j}$ m/s^2

d) $\vec{v} = 16\hat{i} + 28\hat{j}$ m/s, $\quad \vec{a} = -8\hat{i} - 46\hat{j}$ m/s^2

e) $\vec{v} = 8\hat{i} + 46\hat{j}$ m/s, $\quad \vec{a} = 16\hat{i} + 28\hat{j}$ m/s^2

Solución
Los vectores de velocidad y aceleración est'an dados respectivamente por :

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \tag{6}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} \tag{7}$$

Para encontrar $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$, derivamos las expresiones dadas:

$$\dot{x} = 8t \tag{8}$$

$$\ddot{x} = 8 \tag{9}$$

$$2x\dot{x} = 16\dot{y} \rightarrow \qquad \dot{y} = \frac{x\dot{x}}{8} = \frac{8t(4t^2-2)}{8} = t(4t^2-2) \tag{10}$$

Por lo tanto para $t = 2$ s, el vector de velocidad es:

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = 8t\hat{i} + t(4t^2-2)\hat{j} = 16\hat{i} + 28\hat{j} \tag{11}$$

Para la aceleración, falta obtener $\ddot{y}$:

$$\dot{y} = t(4t^2-2) \qquad \rightarrow \qquad \ddot{y} = 4t^2 - 2 + t \cdot 8t = 12t^2 - 2 \tag{12}$$

Por lo tanto, el vector de aceleración para $t = 2$ sería:

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} = 8\hat{i} + (12t^2-2)\hat{j} = 8\hat{i} + 46\hat{j} \tag{13}$$

Problema 3 [1 punto]

Dos autos parten del origen del plano horizontal x, y. El auto A se mueve con velocidad $\vec{v}_A = u\hat{i}$, y el auto B se mueve con velocidad $\vec{v}_B = -u\hat{j}$.

¿Cuál es la velocidad relativa de las dos partículas observadas desde el auto A?

a) $-u(\hat{x} + \hat{y})$

b) $u(\hat{x} + \hat{y})$

c) 0

d) $u(\hat{x} - \hat{y})$

e) Ninguna de las anteriores

Problema 4 [1 punto]

En la figura se indica la posición de una partícula en función de sus coordenadas x e y. La tangente del ángulo que forma la velocidad de la partícula con respecto al eje x, en el momento indicado con la letra A, es:

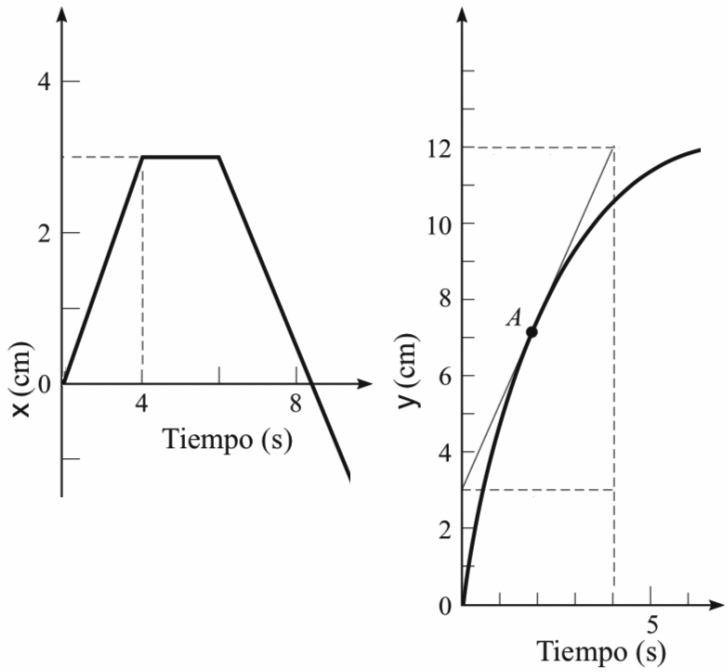
a) 9/4

b) 4/3

c) 9/5

d) 3

e) 1/3



Solución:

La componente vertical de la velocidad está dada por la pendiente en A: $v_y = 9/4$ cm/s. La componente horizontal corresponde a la velocidad constante entre 0 y 4 segundos de la figura de la izquierda: $v_x = 3/4$ cm/s. El ángulo θ que forma la velocidad con el eje x cumple entonces con $\tan\theta = v_y/v_x = 3$.

Problema 5 [1 punto]

Una bola de nieve rueda del techo de una casa con inclinación θ. La bola tiene una rapidez v_0 al salir del techo y tarda τ segundos en llegar al suelo. Despreciando la resistencia del aire, ¿con qué rapidez v llega la bola al suelo?

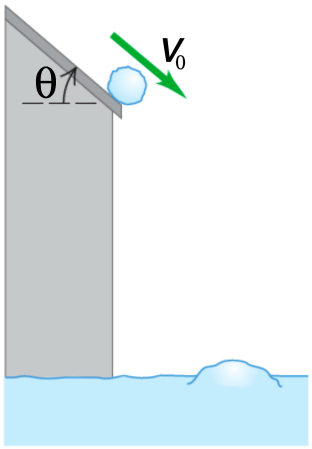
a) $v = \sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2 + g\tau v_0 \cos\theta}$

b) $v = \sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2 + 2g\tau v_0 \cos\theta}$

c) $v = \sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2 + g\tau v_0 \sin\theta}$

d) $v = \sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2 + 2g\tau v_0 \sin\theta}$

e) No se puede responder, pues falta saber desde qué altura cae la bola.



Solución:

$$v_x(\tau) = v_0 \cos\theta$$

$$v_y(\tau) = -v_0 \sin\theta - g\tau$$

$$v(\tau) = \sqrt{v_x(\tau)^2 + v_y(\tau)^2}$$

$$v(\tau) = \sqrt{v_0^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + g^2\tau^2 + 2g\tau v_0 \sin\theta}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2 + 2g\tau v_0 \sin\theta}$$

Problema 6 [1 punto]

Considere una masa puntual que se mueve en la trayectoria $\vec{r}(t) = v_{x0}t\hat{i}+y_0\hat{j}$. ¿Cuál aseveración es correcta sobre este movimiento descrito en un sistema de coordenadas polares con el mismo origen?

a) $\ddot{r} = 0$

b) $\dot{r} = 0$

c) $\ddot{r} = 2r\dot{\theta}$

d) $\dot{r} = \frac{r\ddot{\theta}}{\dot{\theta}}$

e) $\dot{r} = -\frac{r\ddot{\theta}}{2\dot{\theta}}$