Interrogación 1: FIS1514 - Dinámica

Instituto de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Profs: A. Edward, B. Loewe, D. Teca

Primer Semestre 2025

Tiempo para responder: 120 minutos.

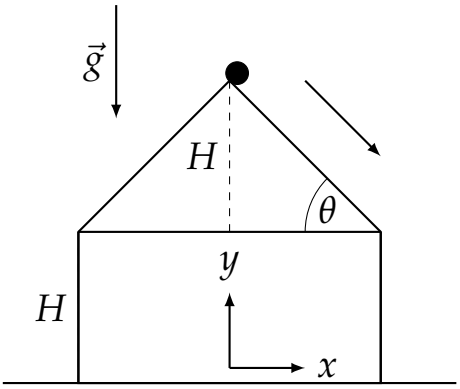
- Debe poner su nombre, rut y sección en cada hoja de respuesta.
- Consultas sólo de enunciado y en voz alta
- No puede usar celular ni calculadora.
- No puede prestar nada.
- Cada problema debe ser resuelto en un cuadernillo de hojas blancas independiente.
- El orden y las explicaciones son requisitos para obtener el puntaje máximo en cada problema.
- Cualquier acto que vaya en contra del código de honor se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

1. Una pelota se desliza sobre el techo liso de una casa. La inclinación del techo es de θ con respecto a la horizontal. La pelota parte del reposo desde el punto más alto del techo, a una altura $2H$ sobre el suelo, donde H es la altura de las murallas de la casa.

   a) (2 ptos.) Determine la velocidad de la pelota al momento de desprenderse del techo.

   b) (2 ptos.) ¿Cuánto se demora la pelota desde que se desprende del techo hasta que llega al piso?

   c) (2 ptos.) ¿A qué distancia de la muralla la pelota impactará el piso?



a) Velocidad de la pelota al desprenderse del techo

La aceleración de la pelota a lo largo del techo es la componente de la gravedad en la dirección paralela al techo de la casa, es decir:

$$a = g \sin\theta \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

La pelota parte del reposo ($v_0 = 0$) y recorre una distancia $d = H/\sin\theta$ a lo largo del techo. Aplicamos la ecuación de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado:

$$v^2 = v_0^2 + 2ad = 0 + 2 \cdot (g \sin\theta) \cdot \frac{H}{\sin\theta} = 2gh \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Por lo tanto, la velocidad es

$$v = \sqrt{2gH}$$

Los componentes de la velocidad al desprenderse son:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} v_x & = & v\cos\theta = \sqrt{2gH}\cos\theta \\ v_y & = & v\sin\theta = \sqrt{2gH}\sin\theta \end{array}} \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

■

b) Tiempo de caída desde el techo hasta el piso

El movimiento vertical desde $y_0 = H$ hasta $y = 0$ está descrito por:

$$y = y_0 + v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Sustituyendo:

$$0 = H + \sqrt{2gH}\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Reordenamos la ecuación:

$$g t^2 - 2\sqrt{2gH}\sin\theta \cdot t - 2H = 0$$

resolvemos esta ecuación cuadrática para t

$$t = \frac{2\sqrt{2gH}\sin\theta \pm \sqrt{(2\sqrt{2gH}\sin\theta)^2 - 4\cdot(g)\cdot(-2H)}}{2g} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

si nos quedamos la solución que nos da el tiempo positivo, encontramos que el tiempo que demora en llegar al suelo es

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 1}\right)} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

c) Distancia a la que impacta la pelota

El movimiento en x es uniforme con velocidad v_x. La distancia recorrida es:

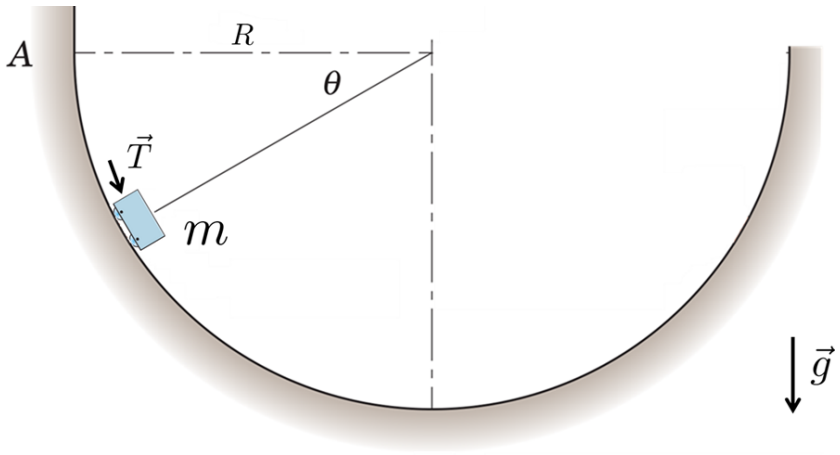
$$x = v_x t = \sqrt{2gH}\cos\theta \cdot t = \sqrt{2gH}\cos\theta \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 1}\right)$$

por lo tanto,la distancia horizontal donde la pelota impactará el piso es

$$\boxed{x = 2H\cos\theta\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 1}\right)} \qquad \text{(2.0 pts.)}$$

■

2. Un pequeño vehículo con autopropulsión, cuya masa es m, viaja hacia abajo por la trayectoria circular de radio efectivo R bajo la acción de su propio peso y de una fuerza constante $\vec{T}$ proporcionada por el motor. La fuerza $\vec{T}$ siempre tiene el mismo sentido de movimiento del vehículo. Despreciar los rozamientos. Considere conocidos la masa m, la magnitud de la fuerza de autopropulsión T y el radio R.



Si el vehículo parte del reposo en el punto A, determine:

a) (4 pto.) la expresión de la velocidad $\vec{v}$ en función de θ,

b) (1 pto.) la fuerza normal N ejercida por la guía sobre las ruedas del vehículo en función de θ.

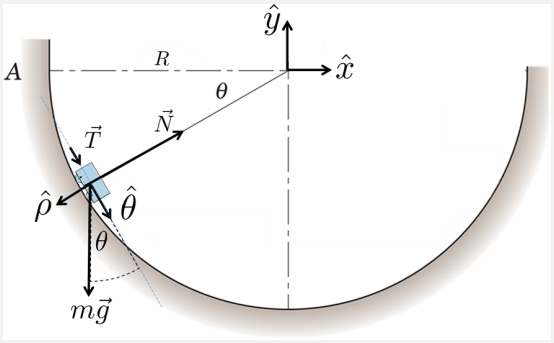
c) (1 pto.) El ángulo θ para el cual la fuerza normal toma su máximo valor.

Ayuda: cuando se dice expresar en función de θ significa que en la expresión final solo debe aparecer en términos de la variable θ. Esto implica que otras variables, como $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$, deben quedar también resueltas en términos de la variable θ.

a) Cálculo de la velocidad

Diagrama de cuerpo libre del vehículo

Las fuerzas externas que actuan sobre el vehículo son el peso $m\vec{g}$, la fuerza de autopropulsión $\vec{T}$ y la normal $\vec{T}$.



(0.4 pts.)

La segunda ley de Newton para el sistema es:

$$\vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}, \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

donde $\vec{a}$ es la aceleración. ■

Definición de fuerzas y aceleraciones en téminos de los vectores unitarios

Fuerza de autopropulsión: $\vec{T} = T\hat{\theta}$ donde T es la magnitud (0.1 pts.).
Peso: $m\vec{g} = m\,g(\sin\theta\hat{\rho} + \cos\theta\hat{\theta})$ (0.1 pts.).
Fuerza normal: $\vec{N} = -N\hat{\rho}$ donde N es una variable escalar (0.1 pts.).
Aceleración: $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\hat{\theta}$. (0.1 pts.)

Segunda ley de Newton en términos de los vectores unitarios

La ecuación de fuerzas toma la forma

$$T\hat{\theta} - N\hat{\rho} + m\,g(\sin\theta\hat{\rho} + \cos\theta\hat{\theta}) = m\,(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + m(2\dot{r}\,\dot{\theta} + r\,\ddot{\theta})\hat{\theta} \qquad (0.4 \text{ pts.})$$

Condiciones

$r = R =$ constante, por tanto $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$. (0.4 pts.)

Ecuaciones escalares

En la dirección de $\hat{\theta}$:

$$T + m\,g\cos\theta = m\,R\,\ddot{\theta}. \qquad (0.4 \text{ pts.})$$

En la dirección de $\hat{\rho}$:

$$-N + m\,g\sin\theta = -m\,R\dot{\theta}^2. \qquad (0.4 \text{ pts.})$$

Integración de la ecuación en la dirección de $\hat{\theta}$

Multiplicando la ecuación por $\dot{\theta}$ se obtiene

$$T\,\dot{\theta} + m\,g\cos\theta\,\dot{\theta} - m\,R\,\ddot{\theta}\,\dot{\theta} = 0. \qquad (0.2 \text{ pts.})$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$\frac{d}{dt}\left(T\,\theta + m\,g\sin\theta - \frac{1}{2}m\,R\,\dot{\theta}^2\right) = 0 \qquad (0.2 \text{ pts.})$$

por tanto

$$T\,\theta + m\,g\sin\theta - \frac{1}{2}m\,R\,\dot{\theta}^2 = k \qquad (0.2 \text{ pts.})$$

donde k es constante. Nótese que por $\theta = 0$ se tiene que $\sin\theta = 0$ y $\dot{\theta} = 0$ ya que la velocidad inicial es cero. Esto implica que

$$k = 0 \qquad (0.2 \text{ pts.})$$

Por tanto, la ecuación se puede reescribir como

$$m\,R\,\dot{\theta}^2 = 2T\,\theta + 2m\,g\sin\theta.$$

Despejando $\dot{\theta}$ se obtiene

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2T\,\theta + 2\,m\,g\sin\theta}{m\,R}}. \qquad (0.2 \text{ pts.})$$

Por definición la velocidad toma la forma

$$\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}. \qquad (0.2 \text{ pts.})$$

■

b) Cálculo de la fuerza normal

De las ecuaciones escalares asociadas a la segunda ley de Newton se tiene que

$$N = m\,R\dot{\theta}^2 + m\,g\,\sin\theta.$$

Sustituyendo la expresión $\dot{\theta}$ obtenida anteriormente se obtiene

$$N = 2T\,\theta + 3\,m\,g\,\sin\theta \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

■

c) Cálculo del ángulo al cual la normal es máxima

Sea θ_{max} el ángulo para el cual la normal es máxima. Entonces se debe satisfacer que

$$\left(\frac{d\,N}{d\,\theta}\right)_{\theta=\theta_{max}} = 0. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Sustituyendo la expresión de la fuerza normal se obtiene

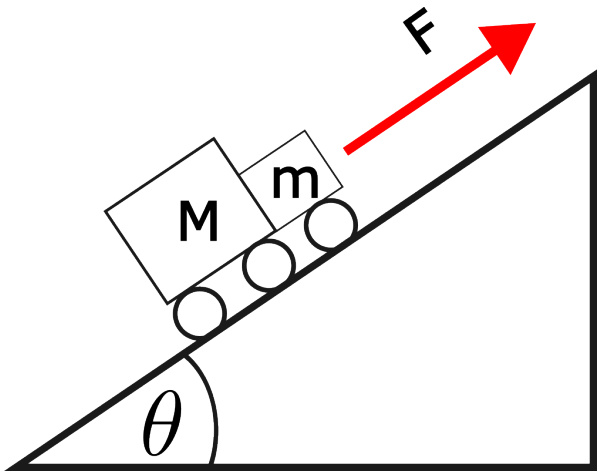
$$2\,T + 3\,m\,g\,\cos\theta_{max} = 0.$$

Por tanto

$$\theta_{max} = \arccos\left(-\frac{2\,T}{3\,m\,g}\right) \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

3. Un camión se compone de dos partes: la carrocería, de masa m, y la carga, de masa M. La carga se encuentra firmemente fija a la carrocería. El camión se encuentra subiendo una colina con un ángulo de inclinación θ respecto a la horizontal. Sobre la carrocería actúa una fuerza F paralela al plano de la colina como se ve en la figura.



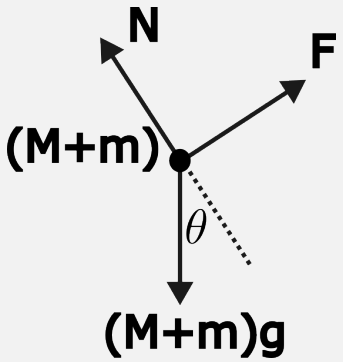
a) (1 pto.) Identifique las fuerzas que actúan en el camión como un todo (carrocería + carga) en un diagrama de cuerpo libre.

b) (2 ptos.) Encuentre la aceleración del camión. ¿Para qué valor de θ el camión viajaría a velocidad constante?

c) (1.5 ptos.) Realice diagramas de cuerpo libre tanto para la carrocería (masa m) como para la carga (masa M). Identifique todas las fuerzas actúan sobre cada cuerpo.

d) (1.5 ptos) Calcule la fuerza total actuando sobre la carrocería y sobre la carga. Recuerde que la fuerza es un vector.

a)



Una sola fuerza correcta (0.3 pts.)
Dos fuerzas correctas (0.6 pts.)
Las tres fuerzas correctas (1.0 pts.)

■

b)

Escogemos un sistema coordenado donde el eje x apunta paralelo al plano hacia la derecha y el eje y en la dirección perpendicular al plano inclinado. En estas coordenadas la aceleración del camión es $\vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{x}\hat{j}$. Como el carro no se levanta del plano $\ddot{y} = 0$ (0.3 pts.) Aplicando la segunda ley en el eje x obtenemos

$$F - (M+m)g\sin(\theta) = (M+m)\ddot{x}, \qquad \text{(0.6 pts.)}$$

y por lo tanto (0.3 pts.)

$$\ddot{x} = \frac{F}{M+m} - g\sin(\theta). \qquad (1)$$

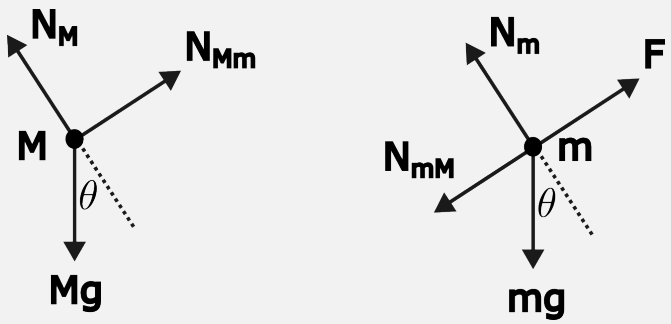
Luego, la aceleración es:

$$\vec{a} = \left(\frac{F}{M+m} - g\sin(\theta)\right)\hat{i}. \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

Ahora, sea θ_0 la inclinación para la cual el camión viaja a velocidad constante. Esto sólo puede ocurrir si $\vec{a} = 0$, y por lo tanto $\ddot{x} = 0$ (0.2 pts.). Imponiendo esto vemos entonces que

$$0 = \frac{F}{M+m} - g\sin(\theta_0) \Rightarrow \theta_0 = \arcsin\left(\frac{F}{g(M+m)}\right). \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

c)



En donde N_{Mm} es la fuerza normal que la carrocería hace en la carga y N_{mM} es la fuerza normal que la carga hace en la carrocería.
Por cada fuerza correcta (0.2 pts.). Si todas las fuerzas están correctas (1.5 pts.)

d)

Alternativa 1:

Como la carga esta firmemente atada a la carrocería, ambos cuerpos tienen la misma aceleración, i.e., $\vec{a}_M = \vec{a}_m = \vec{a}_M$ (0.5 pts.)
Luego, aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo por separado tenemos que

$$\vec{F}_M^T = M\vec{a} = M\left(\frac{F}{M+m} - g\sin(\theta)\right)\hat{i}, \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

$$\vec{F}_m^T = m\vec{a} = m\left(\frac{F}{M+m} - g\sin(\theta)\right)\hat{i}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Alternativa 2:

Primero, reconocemos que como la carga esta sujeta a la carrocer[ia $\ddot{x}_M = \ddot{x}_m = \ddot{x}$ (0.2 pts.). Aplicando la segunda ley de Newton a la carga en cada eje, tenemos que (0.2 pts.)

$$F_{Mm} - Mg\sin(\theta) = M\ddot{x}, \qquad (2)$$

$$N_M - Mg\cos(\theta) = 0. \qquad (3)$$

■

Similarmente, haciendo lo mismo para la carrocería obtenemos que (0.2 pts.)

$$-F_{mM} - mg\sin(\theta) + F = m\ddot{x}, \tag{4}$$
$$N_m - mg\cos(\theta) = 0. \tag{5}$$

Claramente, obtenemos entonces que $N_M = Mg\cos(\theta)$ y $N_m = mg\cos(\theta)$ (0.1 pts.). De (2) obtenemos que (0.2 pts.)

$$F_{Mm} = M\ddot{x} + Mg\sin(\theta) = M\left(\frac{F}{M+m} - g\sin(\theta)\right) + Mg\sin(\theta) = \frac{MF}{M+m}, \tag{6}$$

en donde ocupamos (1) para deshacernos de $\ddot{x}$. Luego, como

$$\vec{F}_M^T = (F_{Mm} - Mg\sin(\theta))\hat{i} + (N_M - Mg\cos(\theta))\hat{j}, \quad \text{(0.2 pts.)}$$

ocupando (3) y (6) obtenemos que

$$\vec{F}_M^T = M\left(\frac{F}{M+m} - g\sin(\theta)\right)\hat{i} \quad \text{(0.1 pts.)}$$

Por otra parte, para la carrocería tenemos que

$$\vec{F}_m^T = (-F_{mM} - mg\sin(\theta) + F)\hat{i} + (N_m - mg\cos(\theta))\hat{j}. \quad \text{(0.2 pts.)}$$

Ocupando en este resultado el que $F_{mM} = F_{Mm}$ (tercera ley), junto con (5) y (6) obtenemos finalmente que

$$\vec{F}_m^T = m\left(\frac{F}{M+m} - g\sin(\theta)\right)\hat{i}. \quad \text{(0.1 pts.)}$$

■