PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE VALPARAISO

Instituto de Matemática
Cálculo Integral
Profesora Elisabeth Ramos

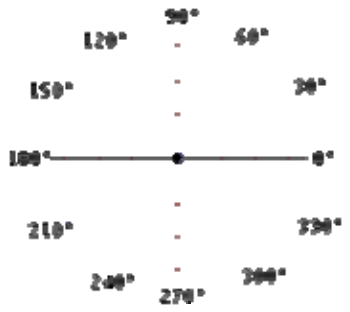
Coordenadas polares

El sistema de **coordenadas polares** es un sistema de coordenadas bidimensional en el cual cada punto o posición del plano se determina por un ángulo y una distancia.

De manera más precisa, todo punto del plano corresponde a un par de coordenadas (r, θ) donde r es la distancia del punto al *origen* o *polo* y θ es el ángulo positivo en sentido antihorario medido desde el eje polar (equivalente al eje x del sistema cartesiano). La distancia se conoce como la «coordenada radial» mientras que el ángulo es la «coordenada angular» o «ángulo polar».

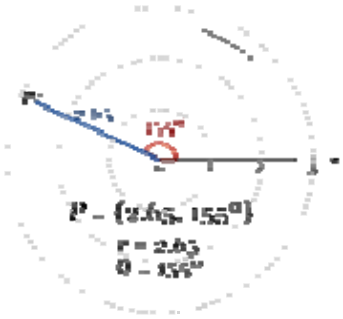
En el caso del origen de coordenadas, el valor de r es cero, pero el valor de θ es indefinido. En ocasiones se adopta la convención de representar el origen por (0,0º).

Representación de puntos con coordenadas polares

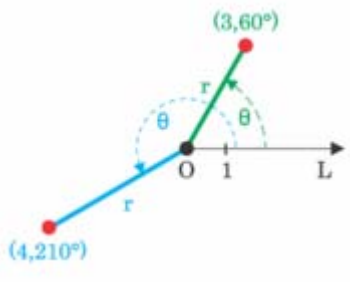


Sistema de coordenadas polares con varios ángulos medidos en grados.

Por ejemplo



Localización de un punto en coordenadas polares.



Los puntos (3,60º) y (4,210º) en un sistema de coordenadas polares.

En la figura se representa un sistema de coordenadas polares en el plano, el centro de referencia (punto **O**) y la línea **OL** sobre la que se miden los ángulos. Para referenciar un punto se indica la distancia al centro de coordenadas y el ángulo sobre el eje **OL**.

- El punto (3, 60º) indica que está a una distancia de 3 unidades desde **O**, medidas con un ángulo de 60º sobre **OL**.
- El punto (4, 210º) indica que está a una distancia de 4 unidades desde **O** y un ángulo de 210º sobre **OL**.

Un aspecto importante del sistema de coordenadas polares, que no está presente en el sistema de coordenadas cartesianas, es que un único punto del plano puede representarse con un número infinito de coordenadas diferentes. Se puede decir entonces que en el sistema de coordenadas polares no hay una función biyectiva entre los puntos del espacio y las coordenadas. Esto ocurre por dos motivos:

- Un punto, definido por un ángulo y una distancia, es el mismo punto que el indicado por ese mismo ángulo más un número de revoluciones completas y la misma distancia. En general, el punto (r, θ) se puede representar como $(r, \theta \pm n \times 360°)$ o $(-r, \theta \pm (2n + 1)180°)$, donde n es un número entero cualquiera.[4]
- El centro de coordenadas está definido por una distancia nula, independientemente de los ángulos que se especifiquen. Normalmente se utilizan las coordenadas arbitrarias $(0, \theta)$ para representar el polo, ya que independientemente del valor que tome el ángulo θ, un punto con radio 0 se encuentra siempre en el polo. Estas circunstancias deben tenerse en cuenta para evitar confusiones en este sistema de coordenadas. Para obtener una única representación de un punto, se suele limitar r a números no negativos $r \geq 0$ y θ al intervalo $[0, 360°)$ o $(-180°, 180°]$ (en radianes, $[0, 2\pi)$ o $(-\pi, \pi]$).[6]

Los ángulos en notación polar se expresan normalmente en grados o en radianes, dependiendo del contexto. Por ejemplo, las aplicaciones de navegación marítima utilizan las medidas en grados, mientras que algunas aplicaciones físicas (especialmente la mecánica rotacional) y la mayor parte del cálculo matemático expresan las medidas en radianes.

Conversión de coordenadas

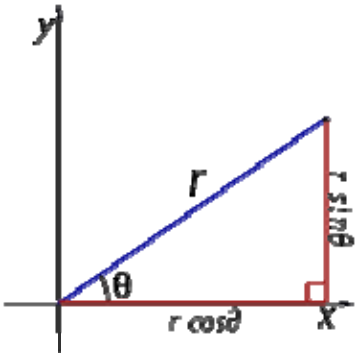


Diagrama ilustrativo de la relación entre las coordenadas polares y las coordenadas cartesianas.

En el plano de ejes xy con centro de coordenadas en el punto O se puede definir un sistema de coordenadas polares de un punto **M** del plano, definidas por la distancia **r** al centro de coordenadas, y el ángulo θ del vector de posición sobre el eje **x**.

Conversión de coordenadas polares a rectangulares

Definido un punto en coordenadas polares por su ángulo θ sobre el eje x, y su distancia **r** al centro de coordenadas, se tiene:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Ejemplos

$u = (2, 120^\circ)$

$$x = 2 \cdot \cos 120^\circ = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$y = 2 \cdot \operatorname{sen} 120^\circ = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$

$$(-1, \sqrt{3})$$

Dibuje el punto considerando el plano cartesiano y el polar.

Conversión de coordenadas rectangulares a polares

Definido un punto del plano por sus coordenadas rectangulares *(x,y)*, se tiene que la coordenada polar *r* es:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (aplicando el Teorema de Pitágoras)

Para determinar la coordenada angular θ, se deben distinguir dos casos:

- Para $r = 0$, el ángulo θ puede tomar cualquier valor real.

- Para $r \neq 0$, para obtener un único valor de θ, debe limitarse a un intervalo de tamaño 2π. Por convención, el intervalo utilizado es [0, 2π).

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} \begin{cases} \frac{+y}{+x} = \alpha \\ \frac{+y}{-x} = 180^\circ - \alpha \\ \frac{-y}{-x} = 180^\circ + \alpha \\ \frac{-y}{+x} = 360^\circ - \alpha \end{cases}$$

Ejemplos

$$U = (1, \sqrt{3})$$

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{+\sqrt{3}}{+1} = 60^\circ$$

Dibuje el punto considerando el plano cartesiano y el polar.

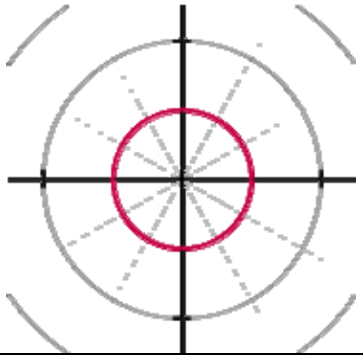
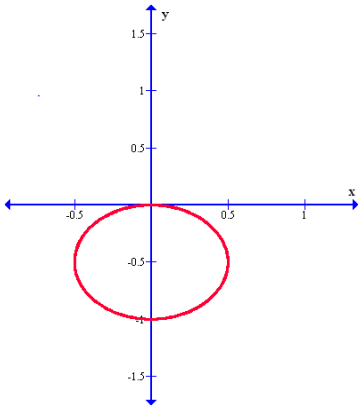
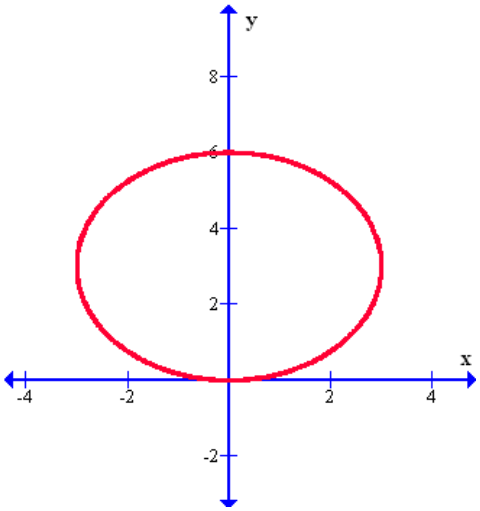
Ecuaciones polares

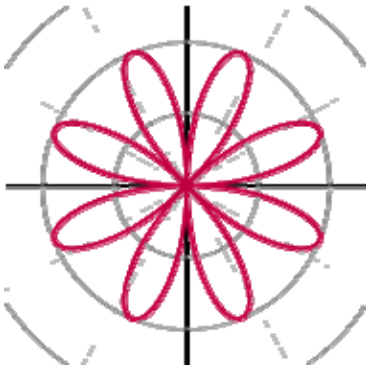
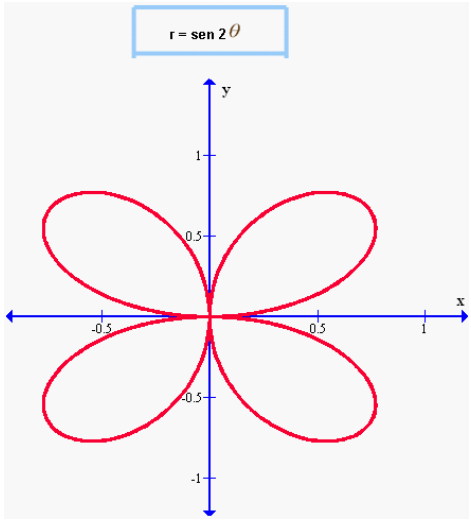
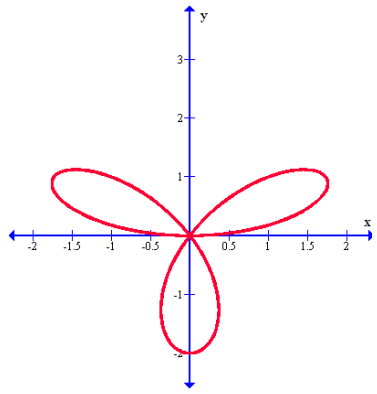
Se le llama *ecuación polar* a la ecuación que define una curva algebraica expresada en coordenadas polares. En muchos casos se puede especificar tal ecuación definiendo r como una función de θ. La curva resultante consiste en una serie de puntos en la forma $(r(\theta), \theta)$ y se puede representar como la gráfica de una función r.

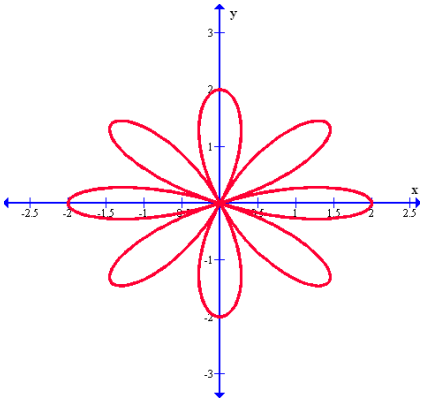
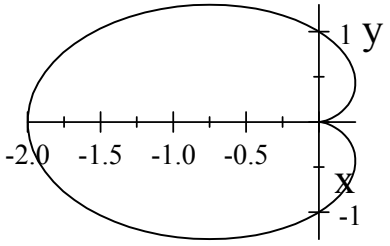
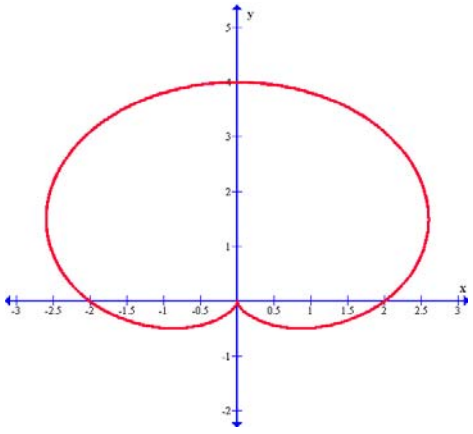
Se pueden deducir diferentes formas de simetría de la ecuación de una función polar r. Si $r(-\theta) = r(\theta)$ la curva será simétrica respecto al eje horizontal (0°/180°), si $r(180°-\theta) = r(\theta)$ será simétrica respecto al eje vertical (90°/ 270°), y si $r(\theta-\alpha°) = r(\theta)$ será simétrico rotacionalmente α° en sentido horario respecto al polo.

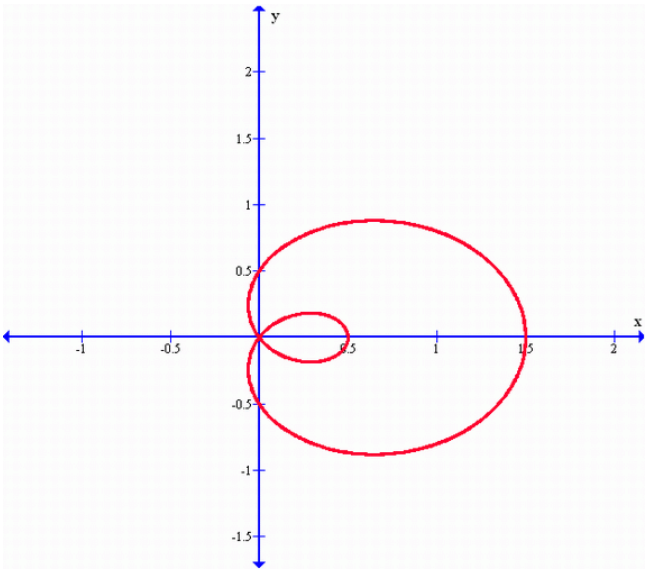
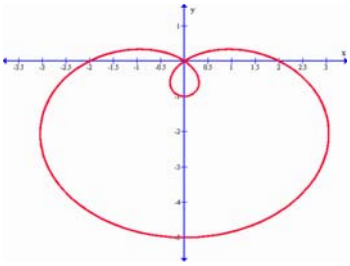
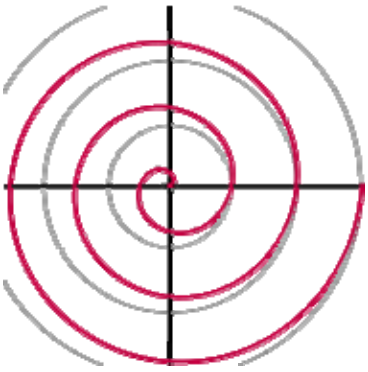
Debido a la naturaleza circular del sistema de coordenadas polar, muchas curvas se pueden describir con una simple ecuación polar, mientras que en su forma cartesiana sería mucho más intrincado. Algunas de las curvas más conocidas son la rosa polar, la espiral de Arquímedes, la lemniscata, el caracol de Pascal y la cardioide.

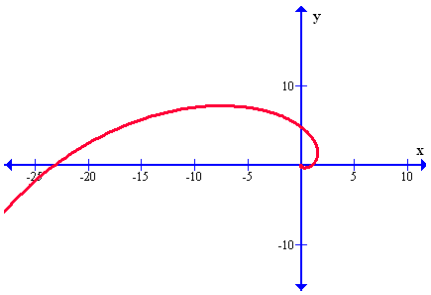
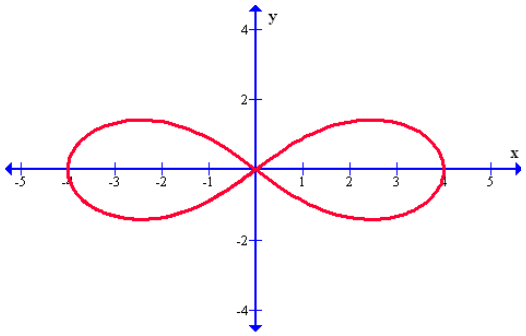
Para los apartados siguientes se entiende que el círculo, la línea y la rosa polar no tienen restricciones en el dominio y rango de la curva.

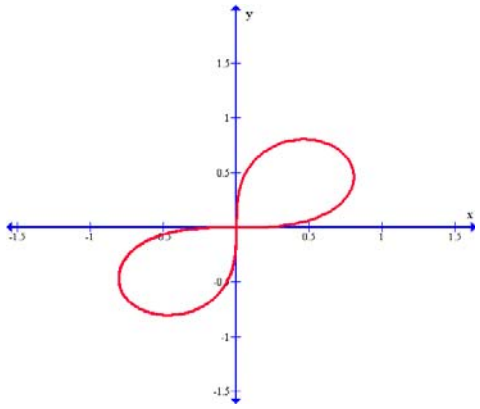
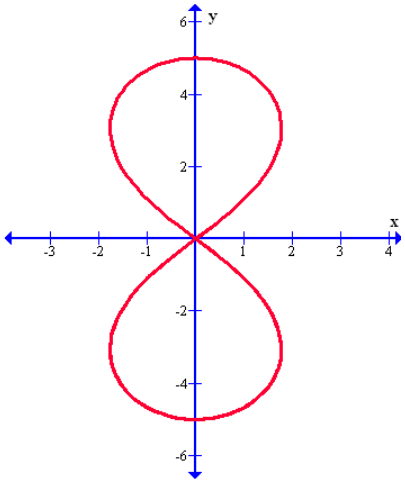
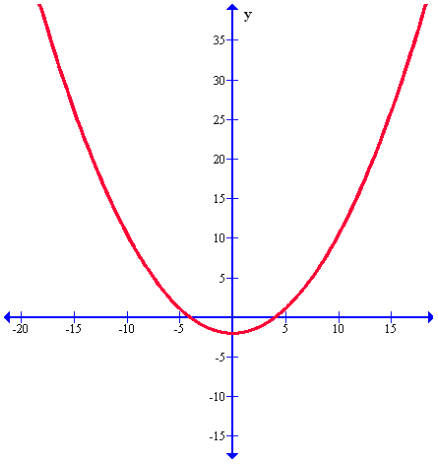
Círculo 	Un círculo con ecuación $r(\theta) = 1$. Otro ejemplo, para un círculo con centro en el polo y radio a, se obtiene: $$r(\theta) = a$$
	**Ejemplos** Esta será formada en el gráfico polar mediante la siguiente función: $r = -\operatorname{sen}\theta$
	una nueva gráfica que resulta en una circunferencia, con la única diferencia que ahora aparece arriba del rayo inicial (o del eje x que todos conocemos), a diferencia del gráfico anterior, que la circunferencia aparecía abajo del radio inicial. La función con su gráfico es esta: $r = 6\operatorname{sen}\theta$
Línea	Las líneas radiales (aquellas que atraviesan el polo) se representan mediante la ecuación $$\theta = \varphi$$ donde φ es el ángulo de elevación de la línea, esto es, φ = arctan m donde m es la pendiente de la línea en el sistema de

	coordenadas cartesianas.
Rosa polar 	Una rosa polar con ecuación $r(\theta) = 2 \sin 4\theta$. La rosa polar es una famosa curva matemática que parece una flor con pétalos, y puede expresarse como una ecuación polar simple, $$r(\theta) = a\cos(k\theta + \phi_0)$$ para cualquier constante φ_0 (incluyendo al 0). Si k es un número entero, estas ecuaciones producirán una rosa de k pétalos cuando k es impar, o $2k$ pétalos si k es par. Si k es racional pero no entero, se producirá una forma similar a una rosa pero con los pétalos solapados. Nótese que estas ecuaciones nunca definen una rosa con 2, 6, 10, 14, etc. pétalos. La variable a representa la longitud de los pétalos de la rosa.
ROSA DE CUATRO HOJAS/PÉTALOS 	Este tipo de gráfico se conoce como Rosa de cuatro pétalos. Es fácil ver cómo se forma una figura parecida a una rosa con cuatro pétalos. La función para este gráfico es: $r = \text{sen } 2\theta$
Rosa de tres pétalos. 	Análogamente al gráfico de la rosa de cuatro pétalos, este gráfico es parecido pero tiene sólo tres hojas o pétalos en su forma gráfica. Un ejemplo es el siguiente: $r = 2\ \text{sen } 3\theta$

ROSA DE OCHO HOJAS/PÉTALOS  	El siguiente gráfico es como los dos anteriores, pero ahora con ocho hojas o pétalos, tal como lo vemos en la siguiente función graficada: $r = 2 \cos 4\theta$
CARDIOIDES  	Se llama **cardioide** a la curva cuya ecuación polar es: $r=a(1+\cos\theta)$, Para este ejemplo se presenta una cardioide simétrica con respecto al eje polar y que apunta hacia la derecha. Podemos observar que se distingue una figura como de un corazón, razón por la cual se llama este gráfico cardioide. La función que lo ha generado es: $r=-1-\cos\theta$
 	Para obtener cardiodes verticales se tiene la ecuación: $r=a(1+\sin\theta)$ *Por ejemplo:* $r = 2\ (1 + \text{sen}\ \theta)$

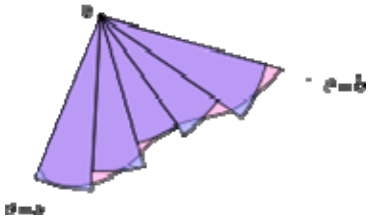
LIMACONES O CARACOLES  	Limaçon viene del latín **limax** que significa **caracol.** Un limaçon o las gráficas polares que generan limaçones son las funciones en coordenadas polares con la forma: $r = 1 + b \cos \theta$ Ahora veamos un ejemplo concreto de un gráfico de este tipo, donde se muestra un **caracol** que apunta hacia la derecha y que tiene un **lazo interior**. La función para este gráfico es la siguiente: $r = (1/2) + \cos \theta$
	Otro gráfico de una función que tiene como resultado **un caracol con un lazo interior** pero que a diferencia del gráfico anterior, este apunta hacia bajo. $r = 2 - 3 \cos \theta$
Espiral de Arquímedes 	Un brazo de la espiral de Arquímedes con ecuación $r(\theta) = \theta$ para $0 < \theta < 6\pi$. La espiral de Arquímedes es una famosa espiral descubierta por Arquímedes, la cual puede expresarse también como una ecuación polar simple. Se representa con la ecuación $r(\theta) = a + b\theta.$ Un cambio en el parámetro a producirá un giro en la espiral, mientras que b controla la distancia entre los brazos, la cual es constante para una espiral dada. La espiral de Arquímedes tiene

	dos brazos, uno para $\theta > 0$ y otro para $\theta < 0$. Los dos brazos están conectados en el polo. La imagen especular de un brazo sobre el eje vertical produce el otro brazo. Otros ejemplos de espirales son la espiral logarítmica y la espiral de Fermat.
	La espiral logarítmica, que se ilustra mediante la siguiente función y su respectivo gráfico: $r = e^{\theta}$
	**LEMNISCATA** En matemáticas, una **lemniscata** es un tipo de curva descrita por la siguiente ecuación en coordenadas polares: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ La representación gráfica de esta ecuación genera una curva similar a ∞. La curva se ha convertido en el símbolo del infinito y es ampliamente utilizada en matemáticas. El símbolo en sí mismo es, a veces, llamado lemniscata. Un ejemplo de esta función con su respectivo gráfico lo apreciamos a continuación: $r^2 = 16 \cos 2\theta$

	Otro ejemplo de lemniscata, pero ahora aparece oblicua: $r^2 = \text{sen } 2\theta$
	Se muestra un gráfico como los dos anteriores, donde aparece una **lemniscata,** con la única diferencia que ahora se muestra en sentido vertical. Veamos: $r^2 = -25 \cos 2\theta$
	**PARÁBOLA** Esta figura es muy conocida en el mundo del Cálculo. Tal como podemos generar funciones de parábolas en coordenadas cartesianas, lo podemos hacer también en coordenadas polares. Veamos el ejemplo: $r = \dfrac{8}{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

Cálculo integral: área en coordenadas polares.

Consideremos la siguiente ilustración



La región *R* se aproxima por *n* sectores (aquí, *n* = 5).

Este resultado puede obtenerse de la siguiente manera. En primer lugar, el intervalo [*a*, *b*] se divide en *n* subintervalos, donde *n* es un entero positivo cualquiera. Por lo tanto Δθ, la longitud de cada subintervalo, es igual a *b* − *a* (la longitud total del intervalo) dividido por *n* (el número de subintervalos). Para cada subintervalo *i* = 1, 2, …, *n*, sea θ_i su punto medio. Se puede construir un sector circular con centro en el polo, radio $r(\theta_i)$, ángulo central Δθ y longitud de arco $r(\theta_i)\Delta\theta$. El área de cada sector es entonces igual a

$$S_i = \tfrac{1}{2} r(\theta_i)^2 \Delta\theta.$$

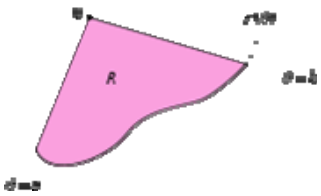
Por lo tanto, el área total de todos los sectores es

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{2} r(\theta_i)^2 \, \Delta\theta.$$

Cuanto mayor sea *n*, mejor es la aproximación al área. En el límite, cuando n → ∞, la suma pasa a ser una suma de Riemann, y por tanto converge en la integral

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}\int_a^b r(\theta)^2 \mathrm{d}\theta = S$$

De lo cual podemos obtener la siguiente conclusión:



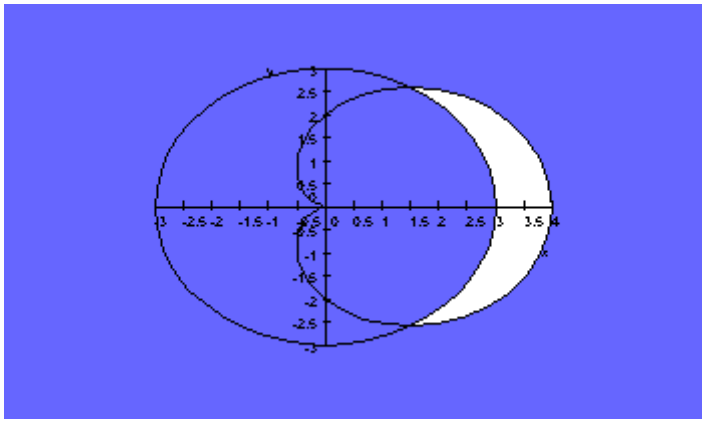
La región R está delimitada por la curva *r(θ)* y las semirrectas $\theta = a$ y $\theta = b$.

Sea *R* una región del plano delimitada por la curva continua *r*(θ) y las semirrectas θ = *a* y θ = *b*, donde $0 < b - a < 2\pi$. Entonces, el área de *R* viene dado por:

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b r(\theta)^2 \, d\theta.$$

Ejemplo 1

Calcule el área de la región que se encuentra dentro de la cardioide con ecuación $r = 2 + 2\cos\theta$ y fuera del círculo con ecuación $r = 3$



Primero se debe buscar la intersección entre las dos gráficas: (en el fondo, puntos en común). Así: $2 + 2\cos\theta = 3$ $2\cos\theta = 1$ ¿Cuándo $\cos\theta$ es $\frac{1}{2}$? En $\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$

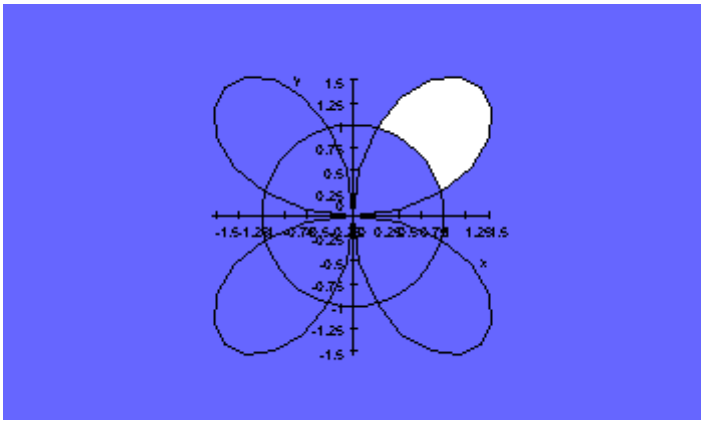
Como las dos gráficas se intersectan en los puntos $\left(3, \frac{-\pi}{3}\right)$ y $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ el elemento de área indicado aumenta de $\frac{-\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{3}$. Usando la fórmula tenemos:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[(2 + 2\cos\theta)^2 - 3^2\right] d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (8\cos\theta + 4\cos^2\theta - 5) d\theta$$

Ejemplo 2

Obtener el área de la región del primer cuadrante que es exterior a la circunferencia de radio $r = 1$ e interior a la Rosa de cuatro pétalos $r = 2\sin 2\theta$

Veamos la gráfica:



Solución: Resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones (para buscar puntos de intersección) tenemos:

$1 = 2\sin 2\theta$ o bien $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$.

se implica que $2\theta = \frac{\pi}{6}$ y $2\theta = \frac{5\pi}{6}$.

Así que $\left(1, \frac{\pi}{12}\right)$ y $\left(1, \frac{5\pi}{12}\right)$ son dos puntos de intersección en el primer cuadrante.

El área en cuestión se indica.

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (4\sin^2 2\theta - 1)d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} 4\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2} - 1\right)d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 4\theta\right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}$$

$= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt[3]{3}}{4} \cong 0.96$ unidades cuadradas.