Estática y Dinámica - FIS-1513

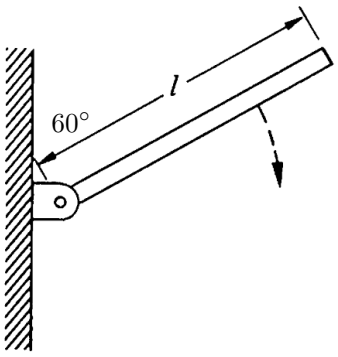
Interrogación 2

Miércoles 17 de Octubre del 2012

Instrucciones
-Tiene 2 horas para resolver los siguientes problemas.
-Resuelva cada uno de ellos en hojas separadas. Sea claro y ordenado.
-Escriba con lápiz pasta, de lo contrario perderá el derecho a recorrección.
-Todos los problemas tienen el mismo peso en la nota final.
-Prohibido usar calculadora o celular.
- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$

Problema 1

Una barra delgada y uniforme de masa M y largo l está pivoteada en un extremo como se muestra en la figura. La barra se suelta desde el reposo a un ángulo de 60° de la vertical.

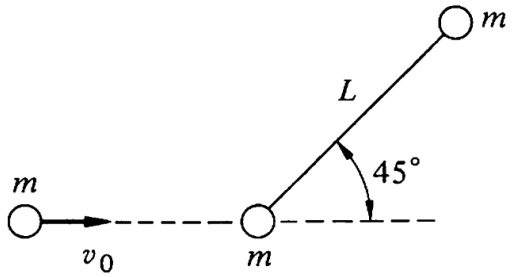


a) Determine la velocidad y aceleración angular de la barra cuando ésta está horizontal.

b) Encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza que el pivote ejerce sobre la barra cuando ésta está en la posición horizontal [Ayuda: ¿que tipo de movimiento realiza el centro de masa de la vara mientras esta cae?]

Problema 2

Una vara rígida sin masa de largo L conecta dos partículas de masa m. La vara reposa sobre una mesa sin roce y es impactada por otra partícula de masa m y velocidad $v_0\,\hat{x}$ moviéndose como se muestra en la figura. Tras la colisión la partícula que impactó a la vara rebota exactamamente en la dirección contraria con la que impactó (es decir, en sentido $-\hat{x}$). Asuma que la colisión es elástica. ¿Cuál es la velocidad angular de la vara en torno a su centro de masa tras la colisión?



Problema 3

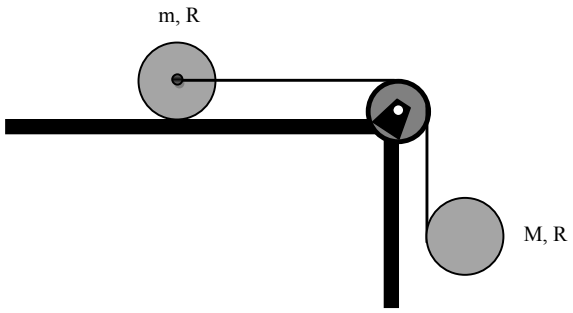
En el sistema de la figura, el cilindro de la izquierda tiene masa m y radio R. El cilindro descansa sobre una superficie horizontal rugosa y rueda sin resbalar. El mismo se encuentra unido mediante una cuerda ideal, que pasa por una polea ideal, a un cilindro macizo de masa M y radio también R. La cuerda está enrollada en el borde de éste último como se ilustra en la figura y no se desliza cuando se desenrrolla del cilindro que cae. Cuando el sistema se deja evolucionar libremente:

a) Dibuje el diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo.

b) Encuentre la aceleración horizontal del cilindro sobre la superficie horizontal.

c) Encuentre la aceleración vertical del centro de masa del cilindro de masa M, y la aceleración angular del mismo.

d) Encuentre la tensión de la cuerda.



Estática y Dinámica - FIS-1513

Pauta Interrogación 2

Miércoles 17 de Octubre del 2012

Problema 1

(a) Podemos calcular la velocidad angular utilizando la conservación de la energía. La energía inicial es puramente potencial gravitatoria y es igual a: $E_i = Mg\cos(60) = (1/2)Mg$, donde hemos elegido el cero de la energía potencial al nivel del pivote. (**0**,**5p**)
Cuando la barra pasa por la posicin horizontal, la energía es puramente cinética y está dada por: $E_f = (1/2)I_p\omega^2$, donde I_p es el momento de inercia de la barra con respecto a un eje que pasa por el pivote. (**0**,**5p**)

Para derivar este último usamos el teorema del eje paralelo $I_p = I_c + M(l/2)^2 = Ml^2/12 + Ml^2/4 = Ml^2/3$, donde I_c es el momento de inercia con respecto al centro de masa que fue dado en el enunciado.(**0**,**5p**, **Nota: si solo se reemplaza el valor de I_p y no se deduce, este puntaje igual se otorga**)

Luego considerando que $E_i = E_f$ (**0**,**5p**), finalmente obtenemos que $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}$. (**0**,**5p**)

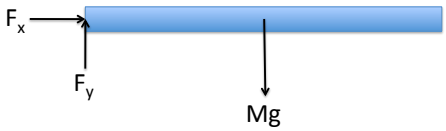
Podemos calcular la aceleración angular de la barra, utilizando $I\alpha = \tau_{neto}$. Para ello expresamos este torque con respecto al pivote, y así obtenemos: $I_p\alpha = (1/3)Ml^2\alpha = \tau = Mg(l/2)$ (**0**,**5p**), y despejando se obtiene que: $\alpha = (3/2)(g/l)$ (**0**,**5p**) .

(b) Para determinar las reacciones en el pivote utilizamos la segunda ley de Newton, tomando en cuenta que el centro de masa de la vara realiza un movimiento circular con radio $l/2$ en torno al pivote.
Cuando la barra está horizontal, F_x es la fuerza radial y F_y la tangencial (ver diagrama de cuerpo libre). Usando la aceleración en coordenadas polares, la componente tangencial indica que

$$Mg - F_y = M(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = M(l/2)\alpha = M(3/4)(g/l)(\mathbf{1p})$$
$$F_y = (1/4)Mg(\mathbf{0},\mathbf{25p})$$

y la radial

$$F_x = M(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -M(l/2)\omega^2(\mathbf{1p})$$
$$F_x = -(3/4)Mg(\mathbf{0},\mathbf{25p})$$



Problema 2

Como la colisión es elástica se conserva la energía cinética lo que implica

$$E_i = (1/2)mv_0^2 = E_f = (1/2)mv'^2 + (1/2)2mv_c^2 + (1/2)I\omega^2 (\mathbf{1},\mathbf{25p}) \quad (1)$$

donde v_c es la velocidad del centro de masa tras la colisión y ω la velocidad angular en torno al centro de masa.
El momentum lineal se conserva lo que implica

$$p_i = mv_0 = p_f = -mv' + 2mv_c (\mathbf{1},\mathbf{25p}) \quad (2)$$

Finalmente, el momentum angular con respecto al centro de masa de la vara se conserva, lo que implica

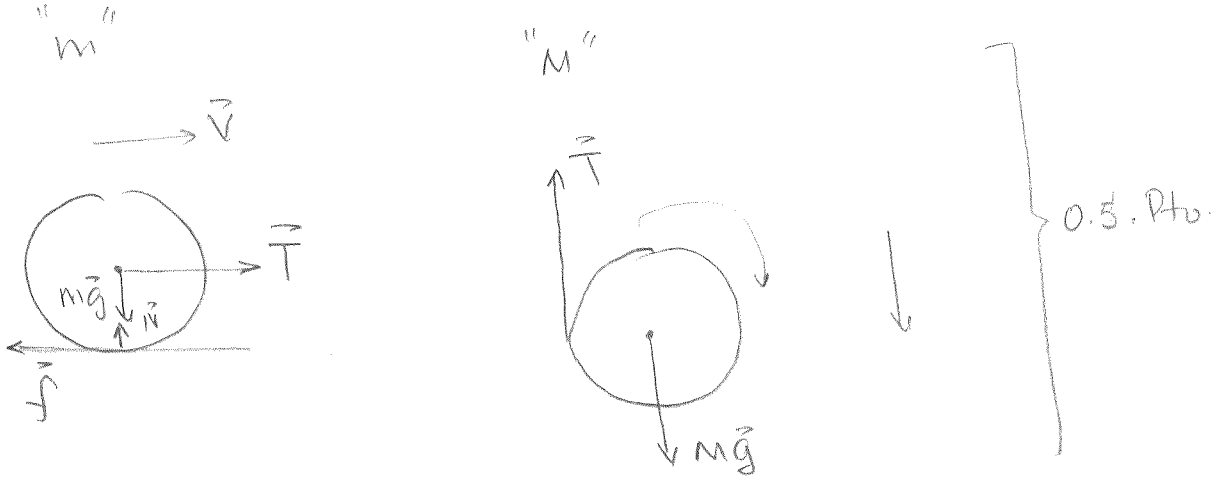
$$L_i = mv_0(l/2)\sin(45) = L_f = -mv'(l/2)\sin(45) + I\omega (\mathbf{1},\mathbf{25p}) \quad (3)$$

Luego considerando que el momento de inercia de la vara en torno a su centro de masa es $I = m(l/2)^2 + m(l/2)^2 = ml^2/2 (\mathbf{0},\mathbf{75p})$.
Las ecuaciones anteriores se simplifican a

$$\begin{aligned} v_0^2 &= (v')^2 + 2v_c^2 + (1/2)l^2\omega^2 & (4)\\ v_0 &= -v' + 2v_c & (5)\\ v_0 &= -v' + \sqrt{2}l\omega & (6) \end{aligned}$$

De estas tres ecuaciones se resuelve que $\omega = (4\sqrt{2}/7)(v_0/l)$ $(\mathbf{1},\mathbf{5p})$ (además se puede obtener que $v_c = (4/7)v_0$ y $v' = -(1/7)v_0$)

a) Diagrama de cuerpo libre



b; c y D).

a: $\sum \vec{F} = m\vec{a}_2$:

$\sum \vec{F} = m\vec{a}_1$:

a_1: aceleración del cilindro de masa m

a_2: " " " " " M

$$T - f = ma_1 \quad (1)$$

$$-T + Mg = Ma_2 \quad (2)$$

} 1.5 pts

b $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$.

para "m": en relación al centro de masa:

$$fR = I_1 \alpha_1 \quad ; I_1 = \frac{1}{2}mR^2 \quad (3) \quad ; \quad a_1 = \alpha_1 R$$ (condición de rodar sin deslizar).

para "M": fb en relación al cm.

$$TR = I_2 \alpha_2 \quad ; I_2 = \frac{1}{2}MR^2 \quad (4).$$

1.5 pts

ecuación de ligadura.

$\Delta y = \Delta x + \theta R$;

entonces

$a_2 = a_1 + \alpha_2 R$.

} 0.5 pto

Δy = Desplazamiento del cilindro de masa M hacia abajo.

Δx : Desplazamiento horizontal del cilindro de masa m.

De (1) y (3)

$T - f = m a_1$

$f = \frac{1}{2} m a_1$

$\Rightarrow T = \frac{3}{2} m a_1$ (5).

agrupando (2) ; (4) y (5).

$-T + Mg = M a_2$ (6) $/M$

$T = \frac{3}{2} m a_1$ (7) $/\frac{3}{2}m$

$T = \frac{1}{2} M R \alpha_2$ (8) $/\frac{1}{2}M$

} 1 pto.

con : $0 = a_1 - a_2 + \alpha_2 R$.

$\frac{2}{3}\frac{I}{m} + \frac{I}{M} - g + \frac{2I}{M} = 0$

$T\left[\frac{2}{3}\frac{1}{m} + \frac{3}{M}\right] = g$

$$T = \frac{3mMg}{2M+9m}$$

Con T;

$$a_1 = \frac{2}{3}\frac{T}{m} = \frac{2Mg}{(2M+9m)} = \frac{g}{\left(1+\frac{9}{2}\frac{m}{M}\right)}$$

$$\alpha_2 = \frac{2T}{MR} = \frac{6mg}{R(2M+9m)}$$

$$a_2 = a_1 + \alpha_2 R = \frac{2Mg}{(2M+9m)} + \frac{6mg}{(2M+9m)}$$

$$a_2 = \left(\frac{2M+6m}{2M+9m}\right)g = \frac{(1+3m/M)}{(1+9/2\,m/M)}\,g.$$

} 1 pto