Interrogación 2: FIS1514 - Dinámica

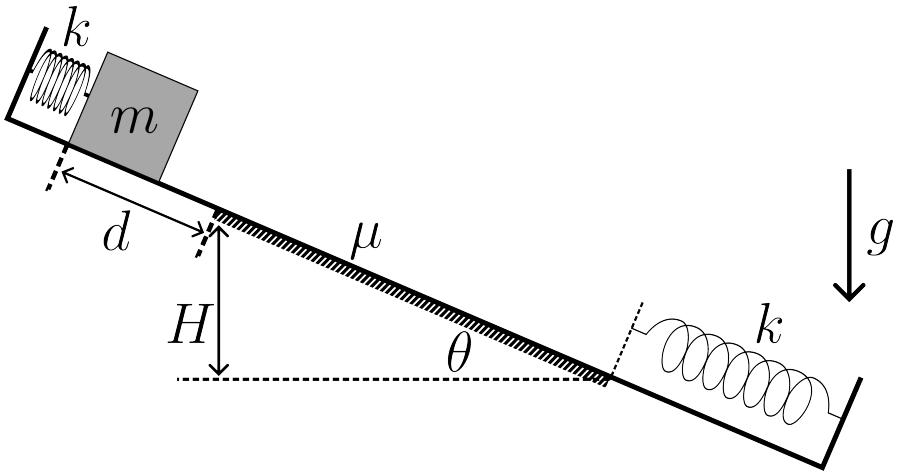
Instituto de Física
Pontificia Universidad Católica de Chile
Profs: A. Edward, B. Loewe, D. Teca

Primer Semestre 2025

Tiempo para responder: 120 minutos.

- Debe poner su nombre, rut y sección en cada hoja de respuesta.
- Consultas sólo de enunciado y en voz alta
- No puede usar celular ni calculadora.
- No puede prestar nada.
- Cada problema debe ser resuelto en un cuadernillo de hojas blancas independiente.
- El orden y las explicaciones son requisitos para obtener el puntaje máximo en cada problema.
- Cualquier acto que vaya en contra del código de honor se sancionará con nota final 1.0 en el curso.

1. Dos resortes idénticos, sin masa y de constante elástica k, están fijos por uno de sus extremos a los extremos opuestos de un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. El plano inclinado se divide en tres regiones consecutivas: dos regiones externas, donde se encuentran los resortes, son lisas (sin fricción) y cada una tiene una longitud igual a la longitud natural del resorte. La región central, ubicada entre los resortes, es rugosa y presenta fricción cinética caracterizada por un coeficiente μ. La diferencia de altura entre el inicio y el final de la zona rugosa es H (ver figura).
Inicialmente, se coloca un bloque de masa m en contacto (sin estar unido) con el extremo libre del resorte ubicado a la izquierda, comprimiéndolo una distancia d respecto a su longitud natural. El sistema se suelta a partir del reposo desde esta configuración inicial.
Se consideran conocidos los siguientes parámetros: d, H, m, g, μ, k y θ.



En las preguntas siguientes exprese las respuestas únicamente en función de los parámetros dados.

a) (1 pto.) La velocidad del bloque justo antes de entrar a la zona rugosa.

b) (1.5 ptos.) La velocidad del bloque justo antes de salir de la zona rugosa.

c) (2 ptos.) La distancia que se comprimirá el resorte de la derecha.

d) (1.5 ptos.) Finalmente, suponga que después de bajar el bloque vuelve a subir a una altura máxima en la cual toca al resorte de la izquierda pero sin comprimirlo. Determine el coeficiente de roce dinámico μ.

Desprecie el roce con el aire y las dimensiones del bloque (se puede considerar como partícula puntual). La aceleración de gravedad tiene módulo g y apunta hacia abajo.

a)

Antes de entrar a la zona rugosa no hay fuerzas conservativas por lo que la energía mecánica se conserva: $E_i = E_f$ Colocando el cero de energía potencial gravitatoria al inicio de la zona rugosa, vemos que la energía inicial es la suma de las energías potenciales gravitatoria y elástica.

$$E_i = \frac{1}{2}kd^2 + mgd\sin(\theta). \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

■

Como el sistema parte del reposo, no hay energía cinética. Nótese además que dado que la distancia de compresión d es a lo largo del plano, la elevación vertical respecto al principio de la zona rugosa es $d\sin(\theta)$. Cuando el bloque llega al inicio de la zona rugosa energía potencial gravitatoria (pues fijamos el 0 en este punto) y no posee energía potencial elástica pues el resorte se encuentra en su largo natural. Luego, en este instante de tiempo la energía es completamente cinética.

$$E_f = \frac{1}{2}mv_1^2. \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}kd^2 + mgd\sin(\theta), \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

y obtenemos que

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}d^2 + 2gd\sin(\theta)}. \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

b)

Ahora, el bloque se desliza por una zona con fricción por lo que la energía mecánica se disipa. De acuerdo al teorema de energía y trabajo (incluyendo energías potenciales), tenemos que $E_f - E_i = W$, donde W es el trabajo hecho por la fuerzas disipativas. Considerando nuestro punto inicial como la condición inicial del sistema y fijando nuevamente nuestro 0 de energía potencial gravitatoria al principio de la zona rugosa, nuevamente tenemos que

$$E_i = \frac{1}{2}kd^2 + mgd\sin(\theta). \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

Nuestro momento final sin embargo, consiste en el momento en que el bloque sale de la zona rugosa. En este instante, el resorte de la derecha todavía no se comprime, por lo que la energía mecánica se compone solamente de energía cinética y energía potencial gravitatoria.

$$E_f = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgH. \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

Por otra parte, la única fuerza disipativa en este sistema es el roce con la superficie del plano, la cual es constante en el tiempo. Su magnitud es $|F_r| = \mu N = \mu mg\cos(\theta)$, donde $N = mg\cos(\theta)$ es la fuerza normal y su dirección es opuesta al movimiento. Por otra parte la distancia que el bloque recorre bajo la acción de esta fuerza esta dado por $L = H/\sin(\theta)$. Luego, el trabajo hecho por esta fuerza es

$$W = -\mu mg\cos(\theta)\left(\frac{H}{\sin(\theta)}\right) = -\mu mgH\cot(\theta). \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

Luego, tenemos que

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - mgH - \left(\frac{1}{2}kd^2 + mgd\sin(\theta)\right) = -\mu mgH\cot(\theta), \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

por lo que

$$v_2 = \sqrt{\frac{k}{m}d^2 + 2gd\sin(\theta) + 2(1-\mu\cot(\theta))gH}. \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

c)

Una vez que dejamos la zona rugosa, la energía mecánica vuelve a conservarse: $E_i = E_f$. Identificamos nuestro punto inicial como el momento en que el bloque sale de la zona rugosa. También elegimos este punto como nuestro 0 de energía potencial gravitatoria. Como el resorte no esta comprimido, la energía mecánica es cinética:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_2^2. \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

■

Nuestro punto final, lo identificamos como el punto de máxima compresión del resorte. Sea esta compresión d_2 con $d_2 > 0$. Entonces, la energía final se compone de la energía elástica y la energía potencial gravitatoria

$$E_f = \frac{1}{2}kd_2^2 - mgd_2\sin(\theta), \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

en donde hemos ocupado que $d_2 > 0$ para escoger el signo de la enegía potencial gravitatoria. Luego, tenemos que

$$\frac{1}{2}kd_2^2 - mgd_2\sin(\theta) - \frac{1}{2}mv_2^2 = 0. \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

Esta es una ecuación cuadrática para d_2. Las posibles soluciones son

$$d_2 = \frac{mg}{k}\sin(\theta) \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}\sin^2(\theta) + \frac{m}{k}v_2^2}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Notemos que sólo la solución con el signo $+$ es positiva, por lo tanto

$$d_2 = \frac{mg}{k}\sin(\theta) + \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}\sin^2(\theta) + \frac{m}{k}v_2^2}. \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

Reemplazando la expresión para v_2 obtenida en la parte anterior vemos que

$$d_2 = \frac{mg}{k}\sin(\theta) + \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}\sin^2(\theta) + d^2 + \frac{2mgd}{k}\sin(\theta) + \frac{2mg}{k}(1 - \mu\cot(\theta))H}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

d)

Ahora el bloque vuelve a subir por la zona rugosa, por que debemos volver a considerar la disipación por la fricción: $E_f - E_i = W_2$.
Consideremos la condición inicial del sistema como nuestro punto inicial y volvamos a colocar nuestro 0 de energía potencial al comienzo de la zona rugosa. Luego

$$E_i = \frac{1}{2}kd^2 + mgd\sin(\theta). \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

En la situación descrita, cuando el bloque vuelve a tocar el resorte lo hace a velocidad 0, por lo que no tiene energía cinética. El resorte no está comprimido por lo que no hay energía elástica y, por construcción, estamos en el punto 0 de energía potencial gravitatoria. Luego, la energía mecánica final es 0 (fue completamente disipada).

$$E_f = 0. \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

El trabajo hecho por la fuerza de roce en este caso es 2 veces el realizado solo en bajar (pues se recorre el doble de distancia). Luego

$$W_2 = 2W = -2\mu mgH\cot(\theta). \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Entonces, tenemos que

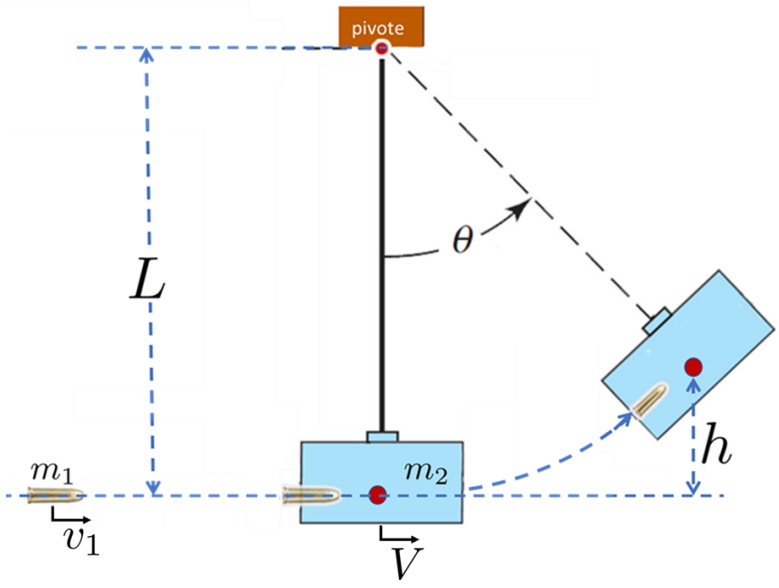
$$-\frac{1}{2}kd^2 - mgd\sin(\theta) = -2\mu mgH\cot(\theta), \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

y por lo tanto

$$\mu = \frac{1}{4}\frac{kd^2}{\cot(\theta)mgH} + \frac{d\sin(\theta)}{2H\cot(\theta)} = \frac{d}{2H}\left(\frac{kd}{2mg} + \sin(\theta)\right)\tan(\theta). \qquad \text{(0.25 pts.)}$$

■

2.



Un péndulo está compuesto por un bloque de masa m_2, suspendido de una cuerda inextensible de longitud L, y se encuentra inicialmente en reposo en su posición de equilibrio. Un proyectil de masa m_1 se mueve horizontalmente con velocidad v_1 y colisiona con el bloque, quedando incrustado en él. Como resultado, el sistema compuesto por el proyectil y el bloque oscila y alcanza un ángulo máximo θ con respecto a la vertical.
Considere conocidos los parámetros m_1, m_2, y L, y trate a θ como una variable independiente del sistema. Además, después del choque, desprecie la distancia entre la bala y el centro de masa del bloque, el cual está representado por un punto en la figura.

a) (1 pto.) Establezca una relación entre la velocidad inicial del proyectil v_1 y la velocidad V del sistema combinado inmediatamente después del choque.

b) (1 pto.) Exprese la altura máxima h alcanzada por el sistema (ver figura) en términos de θ y los parámetros conocidos.

c) (1 pto.) Obtenga una expresión para la velocidad inicial v_1 del proyectil en función de θ y los parámetros conocidos.

d) (1 pto.) Dibuje el diagrama de cuerpo libre del sistema después del choque ($\theta > 0$) y escriba las ecuaciones de Newton correspondientes.

e) (1 pto.) Suponiendo conocida la velocidad v_1 del proyectil antes del choque, determine la expresión para la tensión $\vec{T}$ en la cuerda inmediatamente después del impacto, en función de los parámetros conocidos.

f) (1 pto.) Determine el trabajo realizado por la tensión de la cuerda durante el movimiento del sistema (justifique su respuesta).

Solución a)

Conservación de cantidad de movimiento (choque totalmente inelástico):

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)V \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

■

Solución b)

Altura máxima alcanzada:

$$h = L(1 - \cos\theta) \qquad \text{(1.0 pts.)}$$

■

Solución c)

Conservación de energía después del choque:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = (m_1 + m_2)g\,h \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

Si sustituimos la definición de h se obtiene

$$\frac{1}{2}V^2 = gL(1 - \cos\theta) \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

Despejando V se obtiene

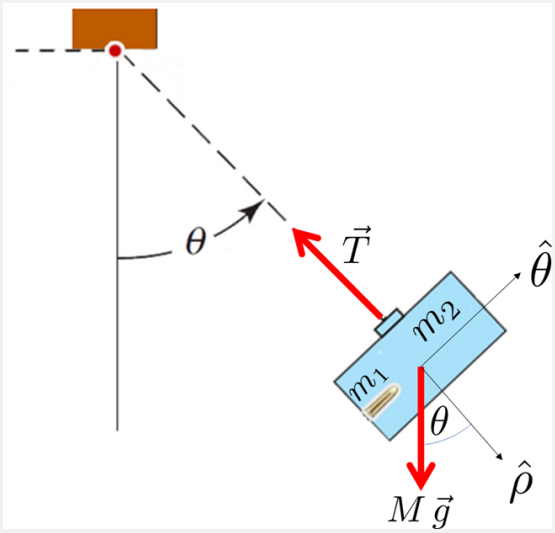
$$V = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}.$$

Utilizando la definición de V obtenida de la conservación del momentum:

$$\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)} \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gL(1 - \cos\theta)} \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

■

Solución d)



Para el sistema de masa total $M = m_1 + m_2$, inmediatamente después del choque la ecuación de Newton vectorial es:

$$\vec{T} + M\vec{g} = M\vec{a}. \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Considerando coordenadas polares centradas en el pivote se tiene que

$$\vec{T} = -T\hat{\rho}, \qquad \vec{g} = g\,(\cos\theta\hat{\rho} - \sin\theta\hat{\theta}), \qquad \vec{a} = -L\,\dot{\theta}^2\hat{\rho} + L\ddot{\theta}\hat{\theta}. \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Por tanto las componentes radial y tangencial de las ecuaciones de Newton toman la forma

$$T - (m_1 + m_2)g\cos\theta = (m_1 + m_2)\frac{v_\theta^2}{L} \quad \text{(fuerza radial)} \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

$$(m_1 + m_2)\,L\,\ddot{\theta} = -(m_1 + m_2)g\sin\theta \quad \text{(fuerza tangencial)} \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

donde

$$v_\theta = L\,\dot{\theta}.$$

■

Solución e)

Tensión en la cuerda inmediatamente después del choque :
En la posición vertical $\theta = 0$ y $v_\theta = V$. Por tanto la tensión toma la forma

$$T = (m_1 + m_2)g + (m_1 + m_2)\frac{V^2}{L} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Sustituimos $V^2 = \left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2$:

$$T = (m_1 + m_2)g + \frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)L} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

Solución f)

Trabajo realizado por la tensión:
La tensión es siempre perpendicular al desplazamiento del sistema (arco circular), por lo tanto:

$$W_T = 0 \qquad \text{(0.6 pts.)}$$

Justificación: El trabajo $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\cos\phi$, y como $\phi = 90°$, se tiene $\cos\phi = 0$, por lo tanto, $W_T = 0$. (0.4 pts.) ■

3. Un sistema está compuesto por una masa m que se encuentra sobre un plano inclinado sin fricción. Esta masa está unida, por un lado, al extremo libre de un resorte y, por el otro, a una cuerda ideal (inextensible). El extremo fijo del resorte está anclado al extremo inferior izquierdo del plano inclinado. La cuerda pasa por una polea ideal ubicada en la parte superior del plano y, en su otro extremo, sostiene una masa colgante M, como se muestra en la figura.

   Se consideran conocidos los siguientes parámetros: las masas m y M, la constante elástica k y la longitud natural del resorte ℓ_0.

   a) (1 pto.) Identifique todas las fuerzas actuando sobre cada bloque y dibújelas en un diagrama.

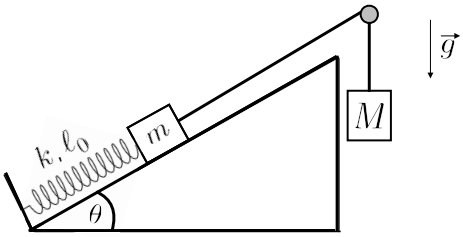
   b) (1 pto.) Identifique la relación de ligadura entre las aceleraciones de ambos bloques.

   c) (1 pto.) Escriba las ecuaciones de Newton correspondientes.

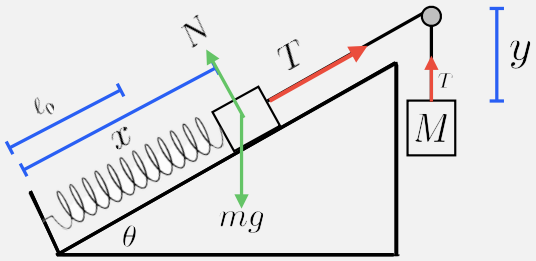
   d) (1 pto.) Muestre que las ecuaciones de Newton se pueden escribir como la ecuación de un movimiento armónico simple e identifique la expresión de la frecuencia angular ω.

   e) (1 pto.) Determine el período P de oscilación.

   f) (1 pto.) Si $m \gg M$, ¿ Cuál es la frecuencia f de oscilación?



a) Diagrama de Cuerpo Libre



(1 pto.)

■

b) Ecuación de Ligadura

La relación de ligadura consiste en expresar la distancia con coordenadas. Por tanto, la solución a este problema no es única y depende de los sistemas de coordenadas adoptados. Por ejemplo, en la figura mostrada en la respuesta a) implícitamente se asume que hay dos sistemas coordenados uno centrado en la base del plano inclinado y otro en el centro de la polea. Además, se supone implícitamente que la coordenada y de la figura es positiva hacia abajo. Entonces, una forma de describir la longitud de la cuerda (despreciando cualquier distancia constante pequeña) es

$$(L - x) + y = \text{constante} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

donde L la hipotenusa del plano inclinado. Tomando segundas derivadas se obtiene

$$\ddot{x} = \ddot{y}. \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

Otra forma de plantear la solución de esta pregunta es:

Nótese que otra opción sería suponer que el sistema de coordenadas que describe la posición de la masa m esté centrado en el extremo libre del resorte en su longitud natural. En ese caso se tendría:

$$[L - (x - \ell_0)] + y = \ell, \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

donde ℓ_0 es el largo natural del resorte y ℓ el largo de la cuerda. Si tomamos las segundas derivadas, obtenemos que

$$\ddot{x} = \ddot{y} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

c) Ecuaciones de Movimiento

Utilizando la segunda ley de Newton ($\sum F = ma$) para cada masa

- Para M : $\quad Mg - T = M\ddot{y}$ (0.5 pts.)

- Para m : $\quad T - mg\sin\theta - (x - \ell_0) = m\ddot{x} \quad$ & $\quad N = mg\cos\theta$ (0.5 pts.)

■

d) Ecuación del Movimiento Armónico Simple

Utilizando la relación para las aceleraciones $\ddot{x} = \ddot{y}$, podemos despejar la tensión desde la ecuación para M y dejarla expresada en termino de $\ddot{x}$, es decir

$$Mg - T = M\ddot{y} = M\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad T = Mg - M\ddot{x} \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

reemplazamos en la ecuación para m

$$\begin{aligned} T - mg\sin\theta - k(x-\ell_0) &= m\ddot{x} \\ Mg - M\ddot{x} - mg\sin\theta - k(x-\ell_0) &= m\ddot{x} \\ (m+M)\ddot{x} + mg\sin\theta + k(x-\ell_0) - Mg &= 0 \\ (m+M)\ddot{x} + k\left(x - \ell_0 + \frac{mg}{k}\sin\theta - \frac{Mg}{k}\right) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

si hacemos

$$u = x - \ell_0 + \frac{mg}{k}\sin\theta - \frac{Mg}{k} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{u} = \ddot{x} \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{u} + ku &= 0 \\ \ddot{u} + \frac{k}{m+M}u &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(0.2 pts.)}$$

si hacemos, $\omega^2 = \dfrac{k}{m+M}$, entonces, la frencuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} \qquad \text{(0.1 pts.)}$$

■

e) Período P

El período es $P = \frac{2\pi}{\omega}$

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

$$\boxed{P = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}} \qquad \text{(0.5 pts.)}$$

■

f) Frecuencia f

La frecuencia es $f = \frac{1}{T}$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+M}} \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

si $m \gg M$ esto implica que

$$\sqrt{\frac{k}{m+M}} = \sqrt{\frac{k}{m\left(1+\frac{M}{m}\right)}} \approx \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(0.4 pts.)}$$

por lo tanto, la frecuencia cuando $m \gg M$ es

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad \text{(0.3 pts.)}$$

■