Estática y Dinámica - FIS-1513

Interrogación 3

Martes 2 de Noviembre de 2010.

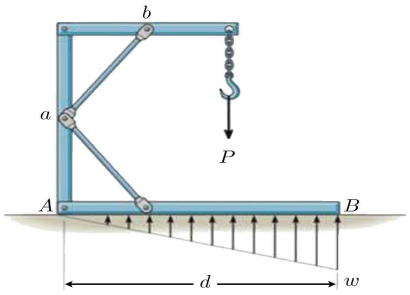
PROFESORES: Sebastian Reyes, Maria Cristina Depassier y Jeronimo Maze

---

Instrucciones
-Tiene 2 horas para resolver los siguientes problemas.
-Resuelva cada uno de ellos en hojas separadas. Sea claro y ordenado.
-Escriba los resultados finales de cada problema con lápiz pasta, de lo contrario perderá el derecho a recorrección.
-Todos los problemas tienen el mismo peso en la nota final.

Problema 1

El marco de la figura está apoyado en la barra AB que reposa sobre una superficie lisa. Cuando se pone carga P en el gancho la presión que ejerce el suelo sobre la barra tiene la distribución lineal que se muestra en la figura. Calcule el largo de la barra AB y el máximo w de la fuerza por unidad de largo que ejerce el suelo sobre la barra.



Solución:

La fuerza distribuida tiene el perfil lineal $f(x) = wx/d$, que se anula en $x = 0$ y vale w en $x = d$. La fuerza total que ejerce el suelo es

$$F_T = \int_0^d f(x)dx = \frac{wd}{2}. \tag{1}$$

Para el equilibrio la suma de todas las fuerza externas se anula por lo que $P = F_T$ lo que determina la relación

$$\frac{wd}{2} = P. \tag{2}$$

La segunda condición de equilibrio es que se anule el torque respecto a cualquier punto. Elijamos el punto A para calcular el torque. La fuerza distribuida produce torque

$$M_{A(f)} = \int_0^d xf(x)dx = \frac{wd^2}{3}$$

y el peso P produce torque

$$M_{A(P)} = -Pb$$

, en equilibrio se anulan por lo que

$$Pb = \frac{wd^2}{3} \tag{3}$$

Despejando de (2) y (3) se obtiene

$$\boxed{d = \frac{3b}{2}} \qquad \boxed{w = \frac{4P}{3b}}.$$

No se preguntaba sobre el punto de aplicación de la fuerza equivalente F_T, este punto que llamamos $\bar{x}$ es $\bar{x}F_T = M_{A(f)} = wd^2/3$ de donde resulta $\bar{x} = b$. Esto se podía prever ya que para calcular el torque respecto a A, la fuerza P se puede desplazar hasta la barra. Dado que P y la fuerza del suelo son iguales, se anula el torque si tienen el mismo punto de aplicación.

Problema 2

La estructura reticulada de la figura está sometida a una carga de magnitud P y que forma un ángulo θ con la vertical.

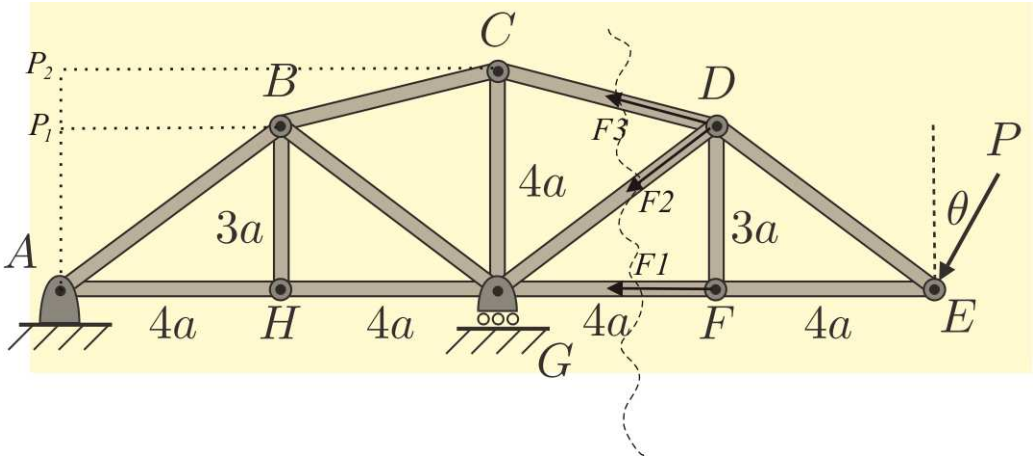
a) Calcule los esfuerzos a los que están sometidos los miembros BH y DF. (1 pto.)

b) Encuentre los esfuerzos a los que están sometidos los miembros CD, GD y GF. (4 ptos.)

c) Para cada uno de los esfuerzos calculados en (b) indique si estos son de tensión o compresión para dos casos: $\theta = 0$ y $\theta = 90$. (1 pto.)

Solución

a) Los miembros BH y DF están sometidos a fuerza cero ya que son verticales y no hay otros miembros verticales en los nodos H y F que pudiesen compensar esta fuerza. Por lo tanto estos dos miembros pueden retirarse de la estructura.



b) Lo más conveniente en este caso es aislar la sección derecha que se muestra en la figura. Primero, para calcular F_1 basta con escribir la ecuación de torque en torno a D.

$$F_1 3a + P(4a\cos\theta + 3a\sin\theta) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{F_1 = -P(\frac{4}{3}\cos\theta + \sin\theta)} \ (1)$$

Para encontrar las fuerzas restantes podemos plantear la ecuación de equilibrio de fuerzas horizontal,

$$F_3\cos\alpha + F_2\cos\beta + F_1 + P\sin\theta = 0 \quad (2)$$

y la ecuación de equilibrio de fuerzas vertical

$$F_3\sin\alpha - F_2\sin\beta - P\cos\theta = 0 \quad (3),$$

donde α es el ángulo de DC con la horizontal y β es el ángulo de DG con la horizontal.

Por otra parte es la geometría del problema nos permite determinar que,

$$\cos\beta = \frac{4}{5}, \ \sin\beta = \frac{3}{5}, \ \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}, \ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Podemos entonces ahora solucionar (2) y (3) para obtener,

$$\boxed{F_2 = -\frac{5}{6}P\cos\theta}$$

$$\boxed{F_3 = \frac{\sqrt{17}}{2}P\cos\theta}$$

c) Suponemos que $P > 0$. Entonces, si el ángulo $\theta = 0$,

$$F_1 = -\frac{4}{3}P < 0 \Longrightarrow \text{HG está comprimida,}$$

$$F_2 = -\frac{5}{6}P < 0 \Longrightarrow \text{BG está comprimida,}$$

$$F_3 = \frac{\sqrt{17}}{2}P > 0 \Longrightarrow \text{BC está tensionada.}$$

Si el ángulo $\theta = 90°$ entonces $F_2 = F_3 = 0$ y

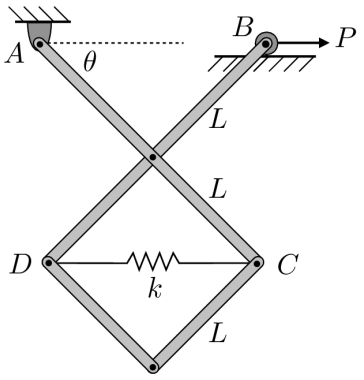
$$F_1 = -P < 0 \Longrightarrow \text{HG está comprimida.}$$

Problema 3

Considere el sistema de la figura en el que la rueda de la derecha está restringida a desplazarse sobre una superficie horizontal. El resorte de constante k se encuentra en su largo natural cuando $\theta = 45°$. Suponga que las masas de las barras son despreciables.

a) Obtenga los desplazamientos horizontales de los puntos B, C y D para un desplazamiento virtual $\delta\theta$. (2 ptos.)

b) Usando el principio de trabajos virtuales, calcule las posiciónes θ_0 de equilibrio cuando se aplica la carga P. (4 ptos.)



Solución:

a) Elijamos ejes x e y con origen en A, x horizontal hacia la derecha. Las coordenadas de los puntos son

$$\vec{r}_C = 2L\cos\theta\hat{i} - 2L\sin\theta\hat{j}$$

$$\vec{r}_D = 0\hat{i} - 2L\sin\theta\hat{j}$$
$$\vec{r}_B = 2L\cos\theta\hat{i}$$

por lo que

$$\delta\vec{r}_B = -2L\sin\theta\delta\theta\hat{i}$$
$$\delta\vec{r}_C = -2L\sin\theta\delta\theta\hat{i} - 2L\cos\theta\delta\theta\hat{j}$$
$$\delta\vec{r}_D = -2L\cos\theta\delta\theta\hat{j}$$

b) Para el cálculo de los trabajos virtuales además de los desplazamientos necesitamos las fuerzas, que son

$$\vec{P} = P\hat{i}, \qquad \vec{F}_{res} = -k(2L\cos\theta - 2L\cos\theta_i)\hat{i}$$

en que el sentido de la fuerza es en el punto C y θ_i es el ángulo para el cual el estiramiento es cero, que en este problema es 45 grados. El trabajo virtual es entonces

$$\delta W = \vec{P}\cdot\delta\vec{r}_B + \vec{F}_{res}\cdot\delta\vec{r}_C = -2LP\sin\theta\delta\theta + 2Lk(2Lcos\theta - 2L\cos\theta_i)\sin\theta\delta\theta = 0.$$

En equilibrio el trabajo virtual se anula. Encontramos dos puntos de equilibrio:

$$\sin\theta = 0 \Longrightarrow \boxed{\theta = 0}$$

y $P = 2kL(\cos\theta - \cos\theta_i)$ culya solución para el ángulo de equilibrio, recordando que $\theta_i = 45$ grados es

$$\boxed{\cos\theta_{eq} = \frac{P + kL\sqrt{2}}{2kL}.}$$

La parte también se pude hacer recordando que el resorte tiene energía potencial

$$U = \frac{1}{2}k(x_C - \sqrt{2}L)^2$$

donde hemos usado que cuando $\theta = 45$, $x_C = L\sqrt{2}$ y donde llamamos x a las componentes horizontales de los desplazamientos . El trabajo virtual es

$$\delta W = P\delta x_B - \delta U = P\delta x_B - \frac{1}{2}2k(x_C - \sqrt{2}L)\delta x_C.$$

Como $\delta x_C = \delta x_B$ queda

$$\delta W = [P - k(2L\cos\theta - \sqrt{2}L)]\delta x_B = 0$$

Si $\delta x_B = 0$ obtenemos $\theta = 0$ y si se anula el término en paréntesis cuadrado obtenemos el segundo punto de equilibrio.