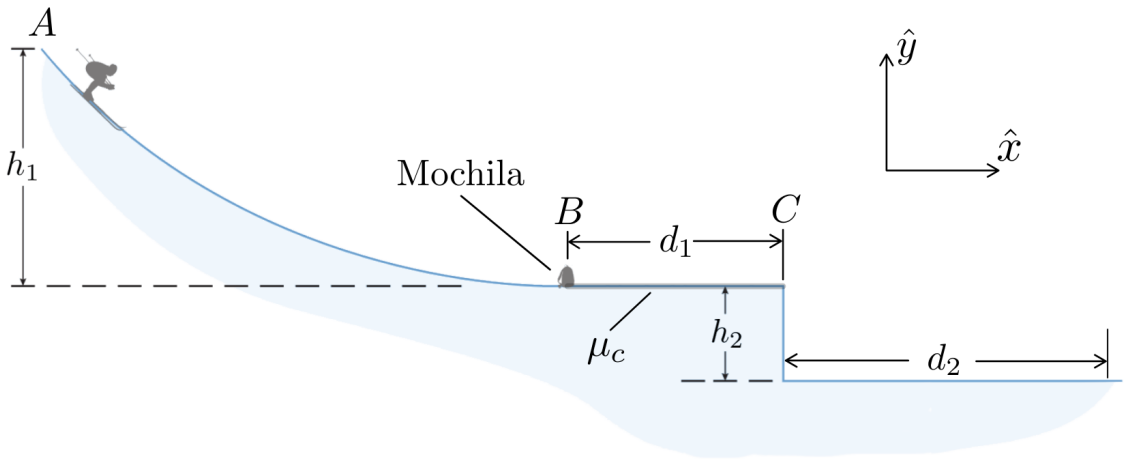
Examen

Fecha: 5 de Diciembre 2024

1. Una persona con una masa m_1 desciende desde el reposo, esquiando por una colina sin fricción desde una altura h_1 (punto A). En la parte horizontal y en pleno movimiento, la persona agarra una mochila de masa m_2 que estaba en reposo (punto B) y continua esquiando con la mochila una distancia d_1 hacia una saliente de altura h_2 (punto C) tal como se muestra en la figura. En la superficie horizontal, entre el punto B y el punto C existe un coeficiente de roce cinético μ_c. Considere que h_1, h_2, g, m_1, m_2, y d_1 son conocidos.



a. Determine las velocidades de la persona justo antes y después de tomar la mochila **[1 pto.]**.

b. Determine el trabajo realizado por la fuerza de roce entre el punto B y el punto C **[1 punto]**.

c. Determine el máximo coeficiente de roce μ_c de la parte horizontal para que la persona con la mochila logre superar la saliente (punto C). **[1 punto]**.

Para los siguientes incisos, considere que la velocidad de la persona con la mochila en los puntos B y C es conocida, $\vec{v}_B$ y $\vec{v}_C$ respectivamente, y que la persona con mochila logra superar la saliente (punto C).

d. Determine el intervalo de tiempo que tarda la persona en recorrer la distancia d_1 entre los puntos B y C **[1 punto]**.

e. Determine el tiempo de vuelo de la persona durante su trayectoria parabólica luego de dejar la saliente hasta que aterriza. **[1 punto]**.

f. Determine la distancia horizontal d_2 que recorre la persona desde que deja la saliente hasta que aterriza **[1 punto]**.

a. Usando conservación de energía para la persona (antes de tomar la mochila) en el punto A y en el punto B se tiene que:

$$E_A = m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{B'}^2 = E_B \quad \rightarrow \quad \vec{v}_{B'} = \sqrt{2gh_1}\hat{x}$$

[0.25 ptos. conservación energía + 0.25 ptos. velocidad en B antes de tomar mochila]
Usando conservación del momentum lineal antes y despues de que la persona tome la mochila:

$$m_1 \vec{v}_B = (m_1 + m_2)\vec{v}_B \quad \rightarrow \quad \vec{v}_B = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_B = \frac{m_1\sqrt{2gh_1}}{m_1 + m_2}\hat{x}$$

[0.25 ptos. conservación momentum + 0.25 ptos. velocidad en B después de tomar mochila]

■

b. El trabajo está dado por:

$$W = -\mu_c(m_1+m_2)gd_1 \qquad \textbf{[1.0 pto.]}$$

c. Por conservación de energía entre el punto B y el punto C se tiene que $E_B + W = E_C$, así:

$$E_B + W = \frac{(m_1+m_2)}{2}v_B^2 - \mu_c(m_1+m_2)gd_1 = \frac{(m_1+m_2)}{2}v_C^2 \quad \rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{m_1 2gh_1}{m_1+m_2} - \mu_c g d_1}$$

[0.25 ptos. conservación energía + 0.25 ptos. velocidad en C]
Por lo tanto, para que la persona logre superar la saliente se requiere que:

$$\frac{m_1 2gh_1}{m_1+m_2} - \mu_c g d_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_c < \frac{m_1 h_1}{(m_1+m_2)d_1}$$

[0.25 ptos. condición general + 0.25 ptos. condición μ_c]

d. Usando el Principio Impulso-Momentum se tiene:

$$(m_1+m_2)\vec{v}_B + \int \vec{F}dt = (m_1+m_2)\vec{v}_C \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{v_B - v_C}{\mu_c g}$$

[0.5 ptos. Teo. Impulso Momentum + 0.5 ptos. intervalo de tiempo]

Desarrollo alternativo:
Se puede obtener el mismo resultado considerando que la aceleración en x está dada por $a = \mu_c g$, **[0.25 ptos.]** y luego escribiendo la ecuación para la velocidad en función del tiempo para el tramo $B-C$, $v(t) = v_B + \mu_c g t$. **[0.25 ptos.]** Entonces el tiempo que demora en recorrer la distancia d_1 será $v_C = v_B + \mu_c \Delta t$, obteniendo el mismo resultado:

$$\Delta t = \frac{v_B - v_C}{\mu_c g}$$

[0.5 ptos.]

e. Usando la ecuación de movimiento con aceleración constante en el eje vertical se tiene que:

$$0 = h_2 - \frac{1}{2}g t_v^2 \quad \Rightarrow \quad t_v = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

[0.5 ptos. Ec. Movimiento + 0.5 ptos. Tiempo de vuelo]

f. Usando la ecuación de movimiento con velocidad constante en el eje horizontal se tiene que:

$$d_2 = v_C t_v \quad \Rightarrow \quad d_2 = v_C\sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

[0.5 ptos. Ec. Movimiento + 0.5 ptos. distancia horizontal]

■

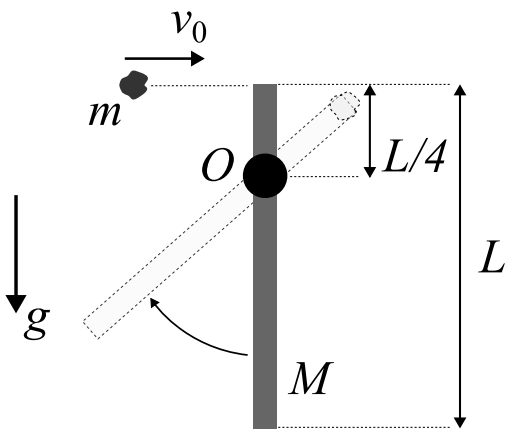
2. Una barra de masa M y largo L se encuentra inicialmente en reposo en posición vertical y fija a un pivote O. Este pivote O se encuentra a una distancia $L/4$ del borde superior inicial de la barra, como muestra la figura. Si una bola de plasticina de masa m choca horizontalmente el borde superior de la barra con una rapidez v_0 y queda pegada a la barra, encuentre

   a. El momento de inercia I_O de la barra con respecto al pivote O **[1 pto.]**.

   b. La rapidez angular ω_1 de la barra justo después de la colisión. *Considere I_O como conocido* **[2 ptos.]**

   c. La posición del centro de masa del sistema barra - plasticina con respecto al pivote O **[1 pto.]**.

   d. La rapidez angular ω_1 mínima necesaria para que el sistema barra - plasticina logre dar una vuelta completa después de la colisión. *Considere I_O como conocido* **[2 ptos.]**



Nota: La bola de plasticina se modela como una masa puntual y $m < M$.
Considere conocidos v_0, g, m, M, y L. Recuerde que el momento de inercia de una barra de masa M y largo L con respecto a su centro de masa es $I_G = ML^2/12$.

a) El momento de inercia I_O lo obtenemos con el teorema de los ejes paralelos

$$I_O = I_G + Md_{G,O}^2, \qquad \textbf{[0.25 ptos.]}$$

donde $d_{G,O} = L/4$ **[0.25 ptos.]**, ya que el centro de masa de la barra está en su centro. Entonces

$$I_O = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{7ML^2}{48}. \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

b) Utilizamos conservación del momentum angular con respecto a O antes y después de la colisión $l_0 = l_1$ **[0.5 ptos.]**. Antes de la colisión sólo la plasticina posee momentum angular, la que colisiona a una distancia $r_{m,O} = L/4$ de O. Entonces

$$l_0 = mr_{m,O}v_0 = mLv_0/4. \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Por otro lado, después de la colisión tanto la plasticina como la barra tienen momentum angular

$$l_1 = mr_{m,O}v_{m,1} + I_O\omega_1. \qquad \textbf{[0.25 ptos.]}$$

Debido a que la plasticina queda pegada a la barra, tenemos que $v_{m,1} = r_{m,O}\omega_1 = L\omega_1/4$. Entonces

$$l_1 = mL^2\omega_1/16 + I_O\omega_1. \qquad \textbf{[0.25 ptos.]}$$

Al imponer $l_0 = l_1$ se obtiene

$$\omega_1 = \frac{4mLv_0}{16I_0 + mL^2} = \frac{12mv_0}{7ML + 3mL}. \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Solución final se puede dejar expresada en términos de I_O. ■

c) El centro de masa sistema barra - plasticina lo obtenemos de

$$r_G = \frac{Mr_{M,O} + mr_{m,O}}{M+m}, \qquad \textbf{[0.2 ptos.]}$$

donde $r_{M,O} = -L/4$ **[0.2 ptos.]** es la distancia entre el centro de masa de la barra y O, y $r_{m,G} = L/4$ **[0.1 pto.]**. Entonces

$$r_G = \frac{L(m-M)}{4(m+M)}. \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Debido a que $m < M$, el centro de masa se encuentra entre O y el centro de masa de la barra, como uno esperaría.

Lo importante es la posición del centro de masa, por tanto es suficiente con tener el valor absoluto correcto.

d) Para resolver este inciso imponemos conservación de la energía entre el instante justo después de la colisión y cuando la barra da una vuelta completa $E_1 = E_2$ **[0.5 ptos.]**. En el primer instante $E_1 = T_1 + U_1$, donde

$$T_1 = T_{m,1} + T_{M,1}: \qquad T_{m,1} = \frac{m}{2}v_{m,1}^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{L}{4}\omega_1\right)^2 = \frac{m}{32}L^2\omega_1^2, \qquad T_{M,1} = \frac{I_O}{2}\omega_1^2, \qquad \textbf{[0.25 ptos.]}$$

son las energías cinéticas de la plasticina y barra, y

$$U_1 = (m+M)gh_{G,1} = (m+M)g\frac{L(m-M)}{4(m+M)} = gL(m-M)/4. \qquad \textbf{[0.25 ptos.]}$$

es la energía potencial del sistema barra - plasticina, donde consideramos $h = 0$ en el pivote.

Para que la barra logre dar la vuelta completa, la condición mínima es que llege con rapidez cero **[0.25 ptos.]**, es decir sin energía cinética. Entonces, $E_2 = U_2$, donde

$$U_2 = (m+M)gh_{G,2} = -(m+M)g\frac{L(m-M)}{4(m+M)} = -gL(m-M)/4. \qquad \textbf{[0.25 ptos.]}$$

Entonces, al imponer $E_1 = E_2$,

$$\frac{m}{32}L^2\omega_1^2 + \frac{I_O}{2}\omega_1^2 + \frac{gL(m-M)}{4} = -\frac{gL(m-M)}{4}.$$

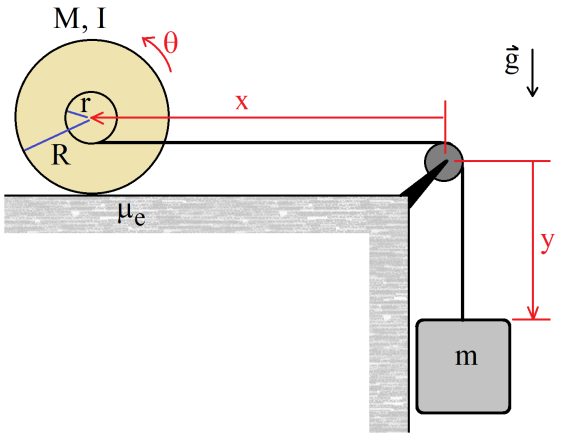
Se obtiene una rapidez angular mínima

$$\omega_1 = 4\sqrt{\frac{gL(M-m)}{16I_O + mL^2}} = 4\sqrt{\frac{3g(M-m)}{(7M+3m)L}}. \qquad \textbf{[0.5 ptos.]}$$

Solución final se puede dejar expresada en términos de I_O.

Notar que se pueden obtener las energías potenciales al considerar las energías potenciales separadas de la barra y plasticina. De manera similar, las energías cinéticas se pueden obtener al consider el sistema compuesto barra - plasticina utilizando un momento de inrcia compuesto. ■

3. Considere un disco de masa M y radio R que rueda sin resbalar sobre una mesa horizontal. La superficie de la mesa es rugosa y el coeficiente de roce estático entre el disco y la mesa es μ_e. El disco tiene una garganta de radio r alrededor de la cual hay una cuerda enrollada como se indica en la figura.



El extremo libre de la cuerda está sujetado a un bloque de masa M que se puede mover verticalmente como se muestra en la figura. Use la coordenada y de la figura para describir la posición vertical de m. A su vez, use la coordenada x de la figura para describir la posición del centro de masa del disco y el ángulo θ para describir la rotación del disco.

a. Dibuje las fuerzas que actúan sobre el disco de masa M y sobre el bloque de masa m, identificando los puntos de acción de cada una de ellas. **[1.0 pto.]**

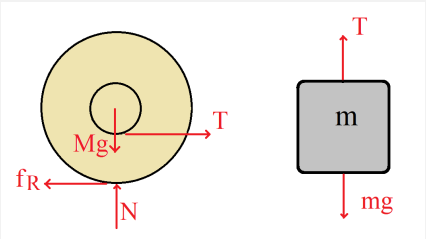
b. Escriba las condiciones de ligadura (rueda sin resbalar) que ligan $\dot{x}$, $\dot{y}$ y $\dot{\theta}$ **[1.0 pto.]**

c. Escriba las ecuaciones de fuerzas y torques para el disco y el bloque **[2.0 pto.]**

d. Determine $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\theta}$, la tensión de la cuerda, y la fuerza de roce. Considere que $r = R/2$ y $M = 3m/2$. Exprese sus resultados en términos de g, m y R **[2.0 ptos.]**

Indicación: Aqui la polea es ideal y solo sirve para llevar la cuerda desde el inicio del disco macizo hasta el bloque. Suponga que el momento de inercia del disco macizo con respecto al centro de masa es $I = \frac{1}{2}MR^2$.

a)



[1 ptos.] b)
Condición de ligadura en el borde de radio R de la rueda: **[0.5 pt]**

$$\dot{x} = R\,\dot{\theta}$$

Condición de ligadura de la cuerda: **[0.5 pt]**

$$\dot{y} = -\dot{x} + r\dot{\theta}$$

■

c)
Ecuaciones de movimiento: **[0.5 pt]**

$$mg - T = m\ddot{y}$$

[0.5 pt]

$$f_R - T = M\ddot{x}$$

[1 pt]

$$-Rf_R + rT = I\ddot{\theta} = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}$$

d)
Soluciones **[0.5 pt]**

$$\ddot{\theta} = \frac{mg(R-r)}{\frac{3}{2}MR^2 + m(R-r)^2} = -\frac{g}{5R}$$

[0.25 pt]

$$\ddot{x} = R\,\ddot{\theta} = -\frac{g}{5}$$

[0.25 pt]

$$\ddot{y} = -(R-r)\ddot{\theta} = -\frac{g}{10}$$

[0.5 pt]

$$T = \frac{3MR^2}{3MR^2 + 2m(R-r)^2}mg = \frac{9mg}{10}$$

[0.5 pt]

$$f_R = \frac{mgMR}{3MR^2 + 2m(R-r)^2}(R+2r) = \frac{3mg}{5}$$

■