Interrogación 2

Fecha: 25 de Octubre 2023

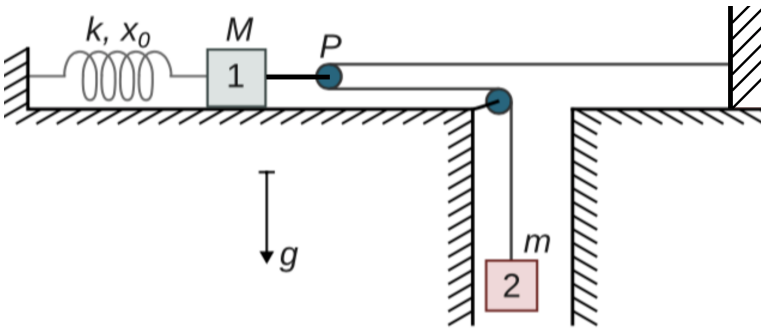
1. **Problema 1.-** En una superficie horizontal sin roce se encuentra un bloque 1 de masa M que está unido a un resorte de constante elástica k y largo natural x_0. Además, este bloque se encuentra unido por una barra indeformable con una polea ideal móvil P. Si por esta polea pasa una cuerda inextensible que sujeta a un segundo bloque de masa m, como muestra la figura. Entonces:

   a) Encuentre la condición de ligadura entre las aceleraciones de los bloques. (2 ptos)

   b) Dibuje el DCL para cada bloque y escriba las ecuaciones de movimiento. (2 ptos)

   c) Encuentre la frecuencia de oscilación del bloque 1. (2 ptos)

   d) Si en un tiempo $t = 0$ el bloque 1 se encuentra en reposo y a una distancia $2x_0$ de la pared izquierda, encuentre la posición del bloque 1 como función del tiempo. (2 ptos Bonus al total de la Prueba)



a) Sean $x_1(t)$ la posición de la masa 1 respecto del muro izquierdo e y_2 la posición de la masa 2 respecto de la polea fija sobre la masa 2 (con y_2 positivo hacia arriba). El largo de la cuerda es constante así como todas las longitudes geométricas como distancia entre muros, distancia al piso etc. Sea $d_1(t)$ la distancia entre ambas poleas, entonces $x_1(t) + d_1(t) = cte$ y $2d_1(t) - y_2(t) = cte$ (Nota $y_2(t) < 0$). En conclusión, la condición de ligadura es (1 pto).

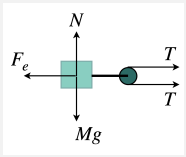
$$2x_1(t) + y_2(t) = cte.$$

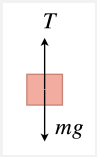
Luego, la condición de ligadura entre las aceleraciones es (1 pto):

$$\ddot{y}_2(t) = -2\ddot{x}_1(t).$$

Notar que y_2 se puede definir positivo hacia abajo, en cuyo caso los signos de la ligadura cambian. La condición de ligaduras para la aceleración también se puede inferir directamente de la geometría del problema.

b) Los DCL son :

DCL1: 

(0.5 pto) DCL2: 

(0.5 pto)

Nota: La fuerza elástica puede estar dibujada en cualquier sentido. Bajar 0.3 décimas si no se considera la normal y peso en el Bloque 1.

Las ecuaciones de movimiento o de Newton son (1 pto: 0.5 c/u):

$$M\ddot{x}_1(t) = -k(x_1 - x_0) + 2T, \quad (1)$$
$$m\ddot{y}_2(t) = T - mg. \quad (2)$$

Notar nuevamente que y_2 puede ser escogido en dirección contraria, en cuyo caso las fuerzas sobre el bloque 2 cambian de signo. Además, $x_1 = 0$ puede ser escogido en otros puntos, por ejemplo en el largo natural, en cuyo caso el término del desplazamiento del resorte cambiará.

c) Eliminando la tensión T y usando la condición de ligadura se encuentra (1 pto)

$$(M + 4m)\ddot{x}_1(t) = -k(x_1 - x_0) + 2mg$$

luego la frecuencia de oscilación es (1 pto)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M+4m}}, \quad \text{o} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+4m}}.$$

d) La solución general a la ecuación del oscilador se puede escribir de varias formas entre ellas (0.5 ptos)

$$x_1(t) = x_0 + \frac{2mg}{k} + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t), \quad (3)$$

o

$$x_1(t) = x_0 + \frac{2mg}{k} + C\cos(\omega t + \delta). \quad (4)$$

Utilizando las condiciones iniciales, en un tiempo $t = 0$ tenemos que (1 pto)

$$x_1(0) = 2x_0\,, \qquad \dot{x}_1(0) = 0.$$

Despejando las constantes para la solución (3) se obtiene:

$$A = \left(x_0 - \frac{2mg}{k}\right) \quad \& \quad B = 0.$$

Para la solución alternativa (4) se obtiene:

$$C = \left(x_0 - \frac{2mg}{k}\right) \quad \& \quad \delta = 0,$$

o también

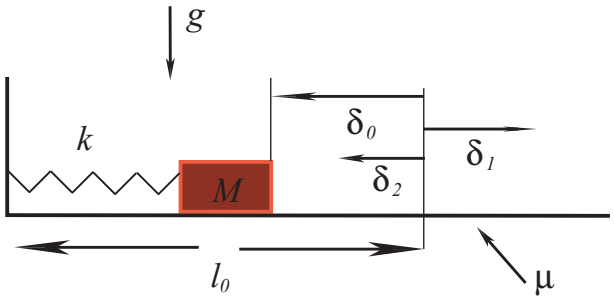
$$C = -\left(x_0 - \frac{2mg}{k}\right) \quad \& \quad \delta = \pi,$$

En este segundo caso, desarrollando $\cos(\omega t + \pi) = -\cos(\omega t)$, se puede ver que cualquiera sea el método usado se obtiene al final (0.5 pto):

$$x_1(t) = x_0 + \frac{2mg}{k} + \left(x_0 - \frac{2mg}{k}\right)\cos(\omega t).$$

■

2. **Problema 2.-** Una masa M está unida al extremo de un resorte de constante de rigidez k y largo natural l_0, fijo a una pared. La masa desliza sobre un plano horizontal cuyo coeficiente de roce cinético es μ. Inicialmente, el resorte está comprimido una distancia δ_0 con respecto a su largo natural l_0. En $t = 0$ la masa se suelta, llegando a alcanzar el resorte una elongación máxima δ_1, luego vuelve y alcanza una compresión δ_2.
Encuentre los valores absolutos de las distancias δ_1 (3 ptos) y δ_2 (3 ptos).



Hint: Considere que el coeficiente de roce cinemático y estático son iguales.

Sean las distancias δ_0, δ_1, y δ_2 positivas, entonces la energía inicial es (0.5 pto)

$$E_0 = \frac{1}{2}k\delta_0^2,$$

mientras que la energía final es (0.5 pto)

$$E_1 = \frac{1}{2}k\delta_1^2,$$

por otro lado el trabajo realizado será (1 pto)

$$W = \int_{-\delta_0}^{\delta_1} (-\mu mg)dx = -\mu mg(\delta_1 + \delta_0).$$

Por el teorema de trabajo y energía tenemos (0.5 pto)

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \frac{1}{2}k\left(\delta_1^2 - \delta_0^2\right) = W = -\mu mg(\delta_1 + \delta_0),$$

simplificando $\frac{1}{2}k(\delta_1 - \delta_0) = -\mu mg$, es decir (0.5 pto)

$$\delta_1 - \delta_0 = -2\frac{\mu mg}{k} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = \delta_0 - 2\frac{\mu mg}{k}.$$

Para el proceso de vuelta es idéntico pero la fuerza de roce cambia de signo:

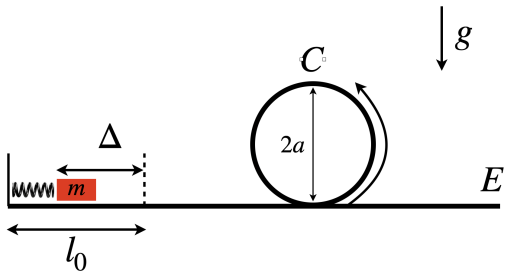
$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2}k\left(\delta_2^2 - \delta_1^2\right) = W = \int_{\delta_1}^{-\delta_2} \mu mg dx = -\mu mg(\delta_2 + \delta_1),$$

en conclusión (3 ptos)

$$\delta_2 - \delta_1 = -2\frac{\mu mg}{k} \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = \delta_0 - 4\frac{\mu mg}{k}.$$

(Atención puesto que el proceso de vuelta es idéntico, basta argumentar que $\delta_0 \to \delta_1$ y $\delta_1 \to \delta_2$, y se obtiene la misma expresión) ■

3. **Problema 3.-** Una masa m comprime un resorte de constante k y largo natural l_0, una distancia Δ respecto del largo natural. La masa, al liberarse desde el reposo, se despega del resorte y viaja hacia un "loop" circular de radio a, pasando por su punto más alto C, sin despegarse del loop. Luego continúa su camino hacia el punto E que se encuentra en el mismo plano que el resorte. Suponga que no existe roce.



a) ¿Cuál es la velocidad de la masa m en el punto C (punto más alto del loop)? (2 ptos)

b) ¿Cuál es la velocidad de la masa m en el punto E? (1 pto)

c) ¿Cuál es la distancia Δ mínima para que se realice lo descrito? (3 ptos)

a) Inicialmente (0.5 pto)

$$E_0 = \frac{1}{2}k\Delta^2.$$

La energía se conserva en todo momento (0.5 pto). Luego en C tenemos (0.5 pto)

$$E_C = \frac{1}{2}mv_C^2 + 2mga.$$

En conclusión (0.5 pto)

$$v_C^2 = \frac{k}{m}\Delta^2 - 4ga.$$

b) En E se tiene que la energía vale (0.5 pto)

$$E_E = \frac{1}{2}mv_E^2,$$

en conclusión (0.5 pto)

$$v_E^2 = \frac{k}{m}\Delta^2.$$

c) Para que se pueda realizar este movimiento, en todo momento el cuerpo debe estar en contacto con el loop, luego la fuerza normal no debe anularse.

Si la masa se encuentra en un ángulo θ, respecto de la vertical, en el loop entonces la fuerza normal satisface (1 pto):

$-m\frac{v^2}{a} = -N + mg\cos\theta$ luego (0.5 pto)

$$N(\theta) = m\frac{v^2}{a} + mg\cos\theta,$$

el mínimo $N(\theta)$ es para $\theta = \pi$ (alternativamente se podrá asumir que el punto crítico de contacto es en C) Se obtiene, $v_C^2 \geq ga$, es decir (1.0 pto)

$$v_C^2 = \frac{k}{m}\Delta^2 - 4ga \geq ga$$

En conclusión (0.5 pto)

$$\Delta \geq \sqrt{\frac{5mga}{k}}.$$

■