Capítulo 7.

Ecuaciones Generales de Estática

1. Introducción

La Estática fue la primera ciencia relacionada con la Mecánica desarrollada con rigor. Su origen data de los trabajos de Arquímedes (nacido en Siracusa, en la antigua Magna Grecia, hoy Sicilia c. 287 AC, fallecido en 212 AC). En particular, los postulados básicos de la Estática se encuentran en *Sobre el Equilibrio de los Planos* ("De planorum aequilibriis"). El primer postulado en este tratado dice textualmente "Las magnitudes están en equilibrio a distancias recíprocamente proporcionales a sus pesos", que en el lenguaje de esre capítulo equivale a decir que en esta situación el torque es nulo.

De lo que hemos aprendido en los capítulos anteriores, las condiciones generales para que un cuerpo esté en equilibrio son:

i) La suma de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo tiene que ser cero.

ii) La suma de los torques ("momentos de fuerza") externos actuando sobre el cuerpo tiene que ser cero.

Ciertamente si estas condiciones no se satisfacen, de acuerdo a las Leyes de Newton, el Centro de Masa del cuerpo aceleraría, y/ó habría aceleración angular del cuerpo en torno a su Centro de Masa.

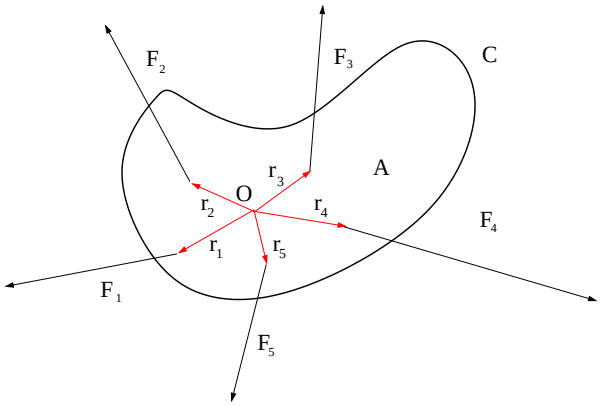


Figura 1: Equilibrio de Torques: si $\tau_O = 0$, entonces $\tau_A = 0$ para todo A.

Dadas estas condiciones generales de equilibrio podemos notar de inmediato que basta exigir que el torque se anule con respecto a un punto, para garantizar de inmediato que el torque con respecto a cualquier otro punto se anule.

Supongamos que sobre el cuerpo C (ver figura) actúan las fuerzas externas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$, aplicadas en los puntos $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$. El torque total que hacen estas fuerzas con respecto al punto O está dado por

$$\tau_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \tag{1}$$

en tanto que el torque que hacen las fuerzas con respecto al punto A está dado por,

$$\vec{\tau}_A = \sum_{i=1}^{N} (\vec{AO} + \vec{r}_i) \times \vec{F}_i = \vec{AO} \times \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \right) + \vec{\tau}_O. \tag{2}$$

De (2) vemos de inmediato que si $\vec{\tau}_O = 0$ y $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$ entonces $\vec{\tau}_A = 0$.

Esta libertad (i.e., la posibilidad de elegir el punto con respecto al cual imponemos la condición de torque nulo), la usaremos a continuación en este capítulo y en los capítulos siguientes para simplificar los cálculos.

A continuación resolveremos varios ejercicios simples de equilibrio de cuerpos.

Ejemplo 1: *Equilibrio de una barra y un bloque, sostenida en dos soportes.* Consideremos una barra homogénea de masa M y largo L que está en forma horizontal apoyada en el suelo por medio de dos soportes en sus extremos (puntos O y A de la figura. Sobre la barra se encuentra un bloque de masa m cuyo centro de masa se encuentra a una distancia δ del extremo de la izquierda (extremo O de la figura). Encontremos las reacciones N_1 y N_2 que hacen los soportes O y A respectivamente para que el sistema *Barra–Bloque* esté en equilibrio.

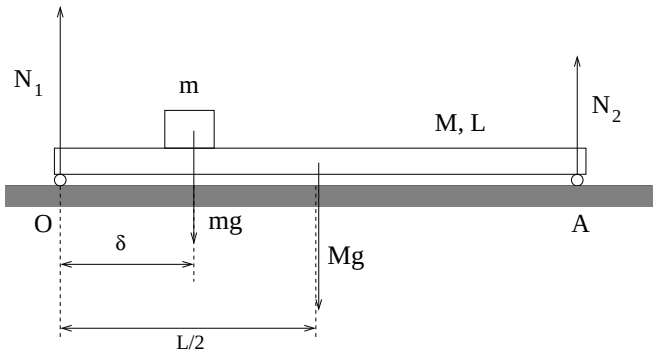


Figura 2: Equilibrio de una barra y un bloque, sostenida en dos soportes.

Solución: Las fuerzas externas (todas verticales) que actúan sobre el sistema Barra–Bloque son: i) el peso de la barra, él que actúa sobre el centro de masa de la barra que está ubicado a distancia $L/2$ de O; ii) el peso del bloque, él que actúa adistancia δ de O; iii) la reacción N_1 que hace el soporte en O, y iv) la reacción N_2 que hace el soporte en A. No hay fuerzas horizontales.

Las ecuaciones de equilibrio (i.e., suma de fuerzas externas sobre el sistema igual a cero y suma de torques externos con respecto a un punto cualquiera igual a cero) son:

Suma de fuerzas externas en la dirección vertical igual a cero:

$$N_1 + N_2 - Mg - mg = 0 \tag{3}$$

Suma de torques externos con respecto a O igual a cero: Si llamamos $\hat{k}$ a la dirección que sale de la hoja del dibujo, el torque externo con respecto al punto O está dados por:

$$\vec{\tau}_O = (N_2\, L - Mg\, L/2 - mg\delta)\hat{k} = \vec{0}, \tag{4}$$

de donde tenemos que

$$N_2\, L - Mg\, L/2 - mg\delta = 0,$$

Como no hay fuerzas externas horizontales, la segunda ecuación de equilibrio de fuerzas (suma de fuerzas externas a lo largo de la horizontal igual a cero) se satisface automáticamente. De este modo tenemos dos ecuaciones que nos permiten determinar las incógnitas N_1 y N_2. Resolviendo (3) y (4) finalmente obtenemos,

$$N_1 = \frac{Mg}{2} + mg\left(1 - \frac{d}{L}\right),$$

y

$$N_2 = \frac{Mg}{2} + mg\frac{d}{L}.$$

Ejemplo 2: *Equilibrio de una barra sostenida por una cuerda y por un pasador.* Consideremos una barra homogénea de masa M y largo L que se encuentra unida

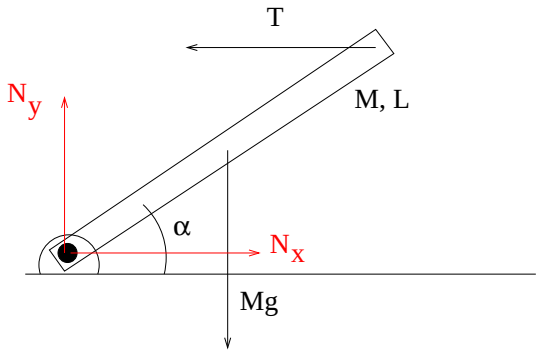


Figura 3: Equilibrio de una barra homogénea sostenida por una pasador y una cuerda.

en uno de sus extremos a un pasador fijo en el suelo y en el otro está sostenida

por una cuerda horizontal como se ilustra en la figura. Cuales son los valores de las componentes de la reacción en el pasador, i.e., N_x y N_y, y la tensión de la cuerda para que la barra se encuentre en equilibrio formando un ángulo α con el suelo.

Solución: Las fuerzas externas actuando sobre el sistema (que en este caso está solo compuesto por la barra) son: i) el peso de la barra (vertical), actuando sobre el centro de masa de la barra, i.e., a la mitad de la barra, ii) la tensión T (horizontal) de la cuerda, actuando en el extremos superior de la barra, y iii) las componentes N_x (horizontal) y N_y (vertical) de la reacción que hace el pasador sobre la barra. Llamemos O al punto donde se encuentra el pasador.

Las ecuaciones de equilibrio (i.e., suma de fuerzas externas sobre el sistema igual a cero y suma de torques externos con respecto a un punto cualquiera igual a cero) son:

Suma de fuerzas externas en la dirección horizontal igual a cero:

$$-T + N_x = 0. \tag{5}$$

Suma de fuerzas externas en la dirección vertical igual a cero:

$$N_y - Mg = 0 \tag{6}$$

Suma de torques externos con respecto a O igual a cero: Si llamamos $\hat{k}$ a la dirección que sale de la hoja del dibujo, el torque externo con respecto al punto O está dados por:

$$\vec{\tau}_O = \left(L \operatorname{sen}\alpha \, T - M\, g \frac{L}{2} \cos\alpha \right) \hat{k} = \vec{0}, \tag{7}$$

Las ecuaciones (5, 6, 7) son tres ecuaciones para las tres incógnitas: N_x, N_y y T. Resolviendo encontramos,

$$N_x = T = \frac{Mg}{2} \cot\alpha, \qquad \text{y } N_y = Mg.$$

Ejemplo 3: *Equilibrio de un sistema barra–peso sostenidos por una cuerda y por un pasador.* Consideremos una barra homogénea de masa M y largo L que se encuentra unida en uno de sus extremos a un pasador fijo en la pared (punto O de la figura) y por una cuerda horizontal (en el punto B) como se ilustra en la figura. Desde el extremo C de la barra cuelga un peso mg sostenido por otra cuerda. ¿Cuales son los valores de las componentes de la reacción en el pasador, i.e., N_x y N_y, y la tensión T de la cuerda para que la barra se encuentre en equilibrio formando un ángulo α con la pared?

Solución: Las fuerzas externas actuando sobre el sistema (que en este caso está solo compuesto por la barra) son: i) el peso de la barra (vertical), actuando

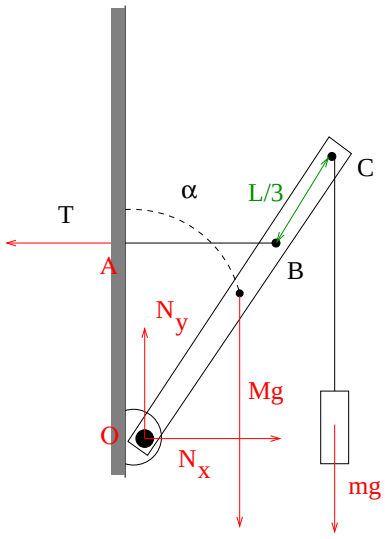


Figura 4: Equilibrio de un sistema *barra–peso* sostenidos por un pasador y una cuerda.

sobre el centro de masa de la barra, i.e., a la mitad de la barra, ii) la tensión T (horizontal) de la cuerda, actuando en el punto B de la barra, iii) el peso del bloque que cuelga desde el extremos de la barra (i.e., mg que apunta a lo largo de la vertical hacia abajo) y iv) las componentes N_x (horizontal) y N_y (vertical) de la reacción que hace el pasador sobre la barra. Llamemos O al punto donde se encuentra el pasador.

Las ecuaciones de equilibrio (i.e., suma de fuerzas externas sobre el sistema igual a cero y suma de torques externos con respecto a un punto cualquiera igual a cero) son:

Suma de fuerzas externas en la dirección horizontal igual a cero:

$$-T + N_x = 0. \tag{8}$$

Suma de fuerzas externas en la dirección vertical igual a cero:

$$N_y - Mg - mg = 0 \tag{9}$$

Suma de torques externos con respecto a O igual a cero: Si llamamos $\hat{k}$ a la dirección que sale de la hoja del dibujo, el torque externo con respecto al punto O está dados por:

$$\vec{\tau}_O = \left(\frac{2}{3} L \cos\alpha\, T - M\, g\, \frac{L}{2} \operatorname{sen}\alpha - m\, g\, L \operatorname{sen}\alpha\right) \hat{k} = \vec{0}, \tag{10}$$

Las ecuaciones (5, 6, 7) son tres ecuaciones para las tres incógnitas: N_x, N_y y T. Resolviendo encontramos,

$$N_x = T = \frac{3}{2}\tan\alpha\left(\frac{Mg}{2} + mg\right), \qquad \text{y la reacción } N_y = (M+m)g.$$

2. Tipos de "Apoyo" o de "Suspensión"

En éste y en los capítulos siguientes usaremos cuatro tipos de apoyo de estructuras:

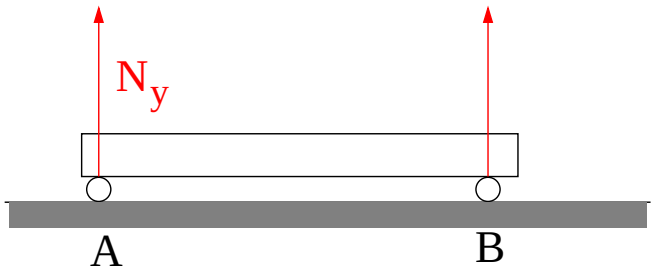


Figura 5: Apoyo más simple: "fuerza de reacción de superficies en contacto".

i) El apoyo más simple es la fuerza de reacción de esuperficies en contacto, que introdujimos en el capítulo 2, cuando discutimos fuerzas de reacción entre cuerpos en contacto. Las fuerzas de reacción (normales) son perpendiculares a las superficies en contacto. Usaremos como nomenclatura uno o más pequeños círculos para denotar estos apoyos. En la figura siguiente, tanto los apoyos A y B que sostienen a la barra horizontal son ejemplos de este tipo de apoyo. Como se indica en la figura estos apoyos solo ejercen fuerzas normales (e.g., la fuerza normal N_y en el apoyo A de la figura) y no ejercen ninguna fuerza a lo largo de las superficies en contacto (i.e., en este ejemplo $N_x = 0$).

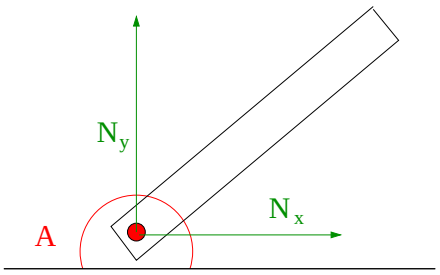


Figura 6: Apoyo tipo "pasador".

ii) El segundo tipo de apoyo es el que se ilustra en la figura siguiente. A este tipo de soporte lo llamaremos *pasador*: la barra de la figura y el soporte fijo al

suelo (en rojo en la figura) están unidos por un eje que pasa por un agujero cilindrico practicado tanto en la barra como en el soporte. Aquí suponemos que no hay roce entre el eje y las superficies internas del soporte y de la barra, de modo que la barra puede girar libremente en torno al eje. Este soporte puede entonces ejercer una reacción tanto en la dirección horizontal como vertical (que llamamos N_x y N_y en la figura). Sin embargo, como no hay roce enttre el eje y las superficies en contacto, este soporte no puede ejercer *torque* o *Momento de fuerzas* sobre la barra.

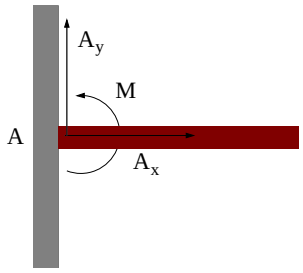


Figura 7: Vigas empotradas.

iii) Un tercer tipo de apoyo es el *empotramiento*. En la figura se ilustra una barra que está *empotrada* en una pared vertical (ver apoyo A de la figura). Este tipo de apoyo puede ejercer una reacción horizontal (A_x) y vertical (A_y) pero también puede ejercer un *momento de fuerzas* (M sobre la barra.

iv) También podemos sostener vigas con un cuarto tipo de apoyo: *la cuerda ideal*; como vimos en el capítulo 2, la cuerda ideal puede ejercer una fuerza de tensión (T, en la figura) a lo largo de la cuerda.

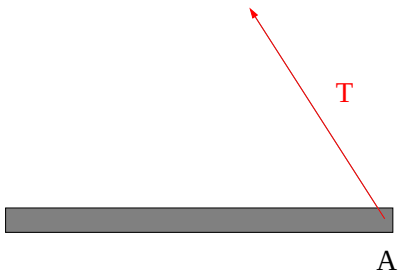


Figura 8: Suspensión por medio de cuerdas

El soporte de *viga empotrada* está ilustrado (ver soporte AB) en la figura siguiente que está tomada del último libro de Galileo “Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze) es el ltimo libro escrito por Galileo Galilei, publicado en 1638 (p. 116, fig. 17).



Figura 9: Ilustración de Galileo de una viga empotrada.

3. Pares de Fuerza

Usualmente se conoce como *Par de Fuerzas* a un sistema de dos fuerzas de la misma magnitud y de sentido contrario como se ilustra en la figura. En la figura la fuerza $-\vec{F}$ está aplicada en el punto B y la fuerza $\vec{F}$ está aplicada en el punto A. Si llamamos d a la sistancia entre las dos lineas que pasan por los puntos A y B de la figura, paralelas a las direcciones de la fuerza, entonces vemos que este par de fuerzas ejerce un *torque* $\vec{M}_O$ con respecto al punto O de la figura (aquí, el punto O está distancia $d/2$ de ambas líneas). El torque ó momento de fuerzas M_O está dado por, El torque o momento de fuerzas M_O está dado por,

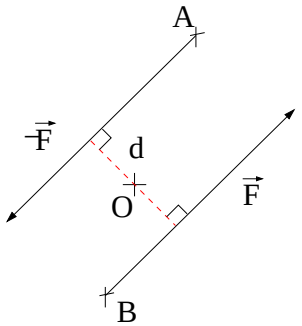


Figura 10: Par de Fuerzas

$$\vec{M}_O = \frac{d}{2}F\hat{k} + \left(-\frac{d}{2}\right)(-F)\hat{k} = F\,d\,\hat{k}.$$

en que $\hat{k}$ es perpendicular (y saliendo) de la hoja de papel

Como vimos al principio de este capítulo, si la suma total de un sistema de fuerzas sobre un cuerpo es cero, la suma de los *torques* o momentos de fuerzas que ejeercen estas fuerzas con repecto a un punto es independiente del punto en cuestión. Así, en el caso de un par de fuerzas el momento de fuerzas que estas hacen con respecto a cualquier punto A del plano va a ser igual a $F\,d$ (i.e., igual a M_O). En vista de este resultado, la acción conjunta sobre un cuerpo de un par de fuerzas F separadas por una distancia d, y al mismo tiempo de un momento de fuerzas $M = -F\,d$, es nula (i.e., la resultante del par de fuerzas es nula, y la resultante del momento de fuerzas más el torque $-Fd$ es nulo. El torque o

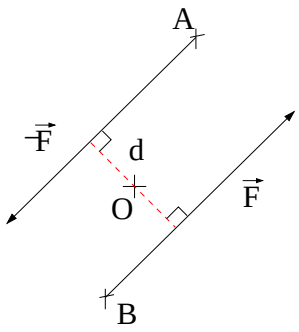


Figura 11: Par de Fuerzas

momento de fuerzas M_O está dado por,

$$\vec{M}_O = \frac{d}{2}F\hat{k} + \left(-\frac{d}{2}\right)(-F)\hat{k} = F\,d\,\hat{k}.$$

en que $\hat{k}$ es perpendicular (y saliendo) de la hoja de papel

Como vimos al principio de este capítulo, si la suma total de un sistema de fuerzas sobre un cuerpo es cero, la suma de los *torques* o momentos de fuerzas que ejeercen estas fuerzas con repecto a un punto es independiente del punto en cuestión. Así, en el caso de un par de fuerzas el momento de fuerzas que estas hacen con respecto a cualquier punto A del plano va a ser igual a $F\,d$ (i.e., igual a M_O). En vista de este resultado, la acción conjunta sobre un cuerpo de un par de fuerzas F separadas por una distancia d, y al mismo tiempo de un momento de fuerzas $M = -F\,d$, es nula (i.e., la resultante del par de fuerzas es nula, y la resultante del momento de fuerzas más el torque $-Fd$ es nulo (ver figura).

En ocasiones, esta observación puede ser útil en la resolución de problemas.

Usemos esta observación para resolver el equilibrio general de una viga homogénea de masa m y largo L empotrada en una pared vertical. Las únicas fuerzas que actúan sobre el sistema son: i) el peso mg que actú a una distancia $d = L/2$ del soporte A (donde la viga está empotrada); las reacciones del soporte, i.e., A_x y A_y, y iii) el momento M_A.

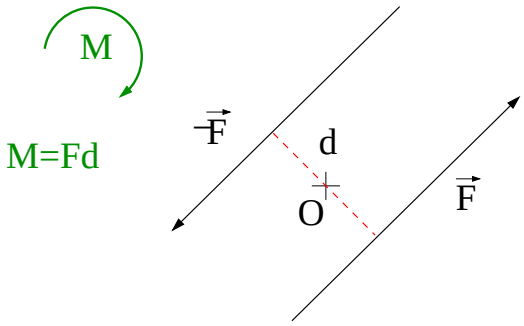


Figura 12: Un sistema nulo: par de fuerzas y momento de fuerzas.

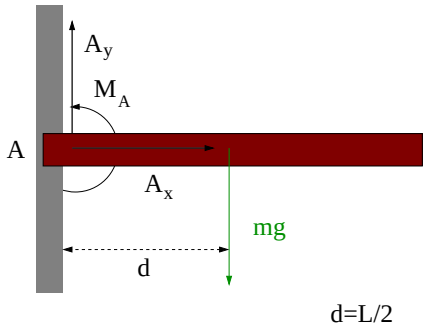


Figura 13: Equilibrio de una barra empotrada

En este ejemplo A_x, A_y, y M_A son incógnitas que debemos determinar. Usando la observación anterior, le podemos aùadir un **sistema nulo**, i.e., el par de fuerzas (F) separadas por una distancia $d = L/2$ y momento ($M = -Fd = -F\,L/2$) (indicados en azul en la figura). Si ahora elegimos la magnitud de la fuerza auxiliar F justo mg, entonces F y mg justo se cancelan, y tenemos finalmente todas las fuerzas referidas al punto A. Ahora resuta muy simple resolver el equilibrio, pues la suma de fuerzas y momentos en el punto A deben anularse. Así, finalmente encontramos,

$$A_x = 0, \qquad A_y = mg, \qquad y, \qquad M_A = +mg\frac{L}{2}.$$

4. Sistemas Indeterminados

En la introducción vimos que las ecuaciones generales de equilibrio de un sistema en dos dimensiones son tres, i.e., i) la suma de las fuerzas horizontales sobre el sistema debe ser nula, i) la suma de las fuerzas verticales sobre el sistema debe ser nula, y iii) la suma de los momentos de fuerza (torques) sobre el sistema con respecto a cualquier punto debe anularse. Estas tres ecuaciones debieran, en general bastar para resolver las fuerzas que ejercen los apoyos del sistema. Sin embargo esto no siempre ocurre, como veremos en el ejemplo siguiente.

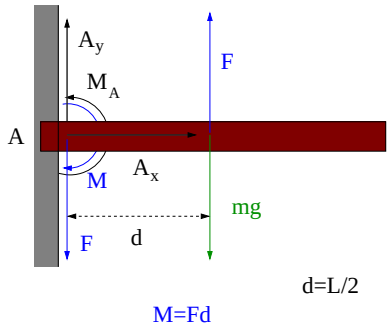


Figura 14: Uso de una *sistema nulo* para resolver el equilibrio de una barra empotrada.

Consideremos el sistema de tres esferas idénticas (ó mejor discos ya que estamos en dos dimensiones) de masa M y radio R, las que se encuentran en equilibrio, soportadas por el suelo horizontal y las paredes verticales. De acuerdo a la modelación que hemos hecho, las fuerzas que hacen las paredes verticales sobre las paredes son perpendiculares a esta, las cuales hemos llamdo respectivamente F_I y F_D. Las reacciones del piso (que no están dibujadas) son verticales. En la figura he rotulado los discos como 1, 2 y 3. Llamemos N_{21} y N_{23} a las reacciones que hacen los discos 1 y 3 respectivamente sobre el disco 2. Dada la simetría del sistema, las reacción N_{13} (que hace el disco 3 sobre el 1 y que no está dibujada en la figura) tiene la misma magnitud que N_{23}. Si uno hace el equilibrio del disco 3 se da cuenta que debe satisfacerse,

$$2\,N_{23}\cos 30^\circ = Mg,$$

de modo que $N_{23} = \sqrt{3}Mg/3$. Y finalmente exigiendo que la suma de las fuerzas horizontales sobre el disco 2 sea nula, debemos tener que,

$$F_D = N_{21} + N_{23} = N_{21} + N_{23}\cos 60^\circ = \frac{1}{2}Mg\frac{\sqrt{3}}{3} + N_{21}. \tag{11}$$

Ahora, para que los discos 1 y 2 estén en contacto es necesario que $N_{21} \geq 0$, de modo que lo único que podemos concluir de (11) es que

$$F_D \geq \frac{1}{2}Mg\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

De hecho si aumentamos F_D por sobre este valor mínimo, el sistema va seguir en equilibrio y lo único que va a suceder es que N_{21} se va a hacer cada vez mayor.

Una indeterminación similar ocurre en el sistema de una barra homogénea de masa M y largo L sujeta por dos apoyos de pasador como se ilustra en la figura siguiente.

Usando las tres ecuaciones de equilibrio general (suma de fuerzas horizontales, verticales y momento igual a cero) podemos determinar rapidamente que $A_y = B_y = Mg/2$. Sin embargo, todo lo que podemos decir en este caso de

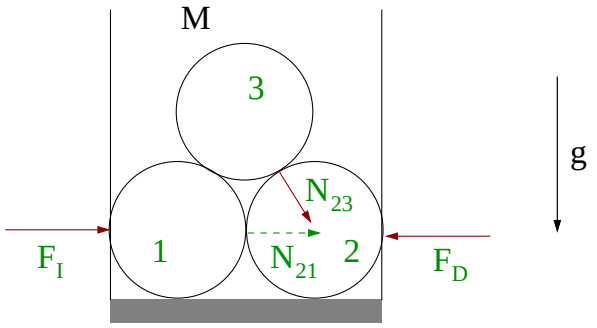


Figura 15: Sistema de tres discos en equilibrio, en que hay indeterminación de fuerzas.

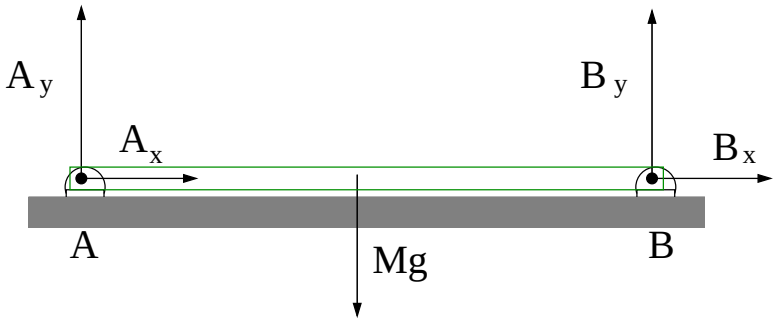


Figura 16: Barra sujeta por dos apoyos de pasador, en que hay indeterminación de fuerzas.

las reacciones horizontales en los apoyos es que $A_x + B_x = 0$, y ninguna de ellas queda completamente determinadas. Esto es similar a lo que ocurre en el ejemplo de los tres discos discutido más arriba.

La indeterminación en este ejemplo se levanta de inmediato si cambiamos uno de los apoyos, digamos el apoyo en B por una apoyo del tipo 1, que permite libertad de movimiento en la dirección horizontal. Este tipo de apoyo solo ejerce reacción en la dirección perpendicular al apoyo, de modo que en este caso $B_x = 0$ y por equilibrio de fuerzas en la dirección horizontal de inmediato concluimos que,

$$A_x = 0$$

y, esta vez el sistema queda completamente determinado.

Consideremos ahora un sistema de dos barras idénticas homogéneas de masa m y de largo L, sujetas por los apoyos A y B de la figura, de modo que forman un ángulo α con la horizontal. Este sistema, aunque también está sujeto al suelo por dos apoyos de pasador, está bien determinado. Aplicando las tres ecuaciones de equilibrio general, podemos determinar de inmediato que

$$A_y = B_y = m\,g.$$

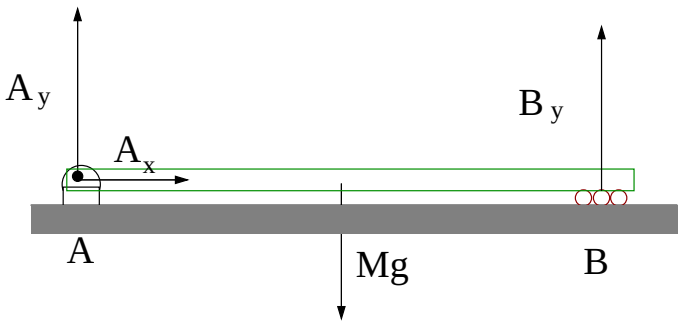


Figura 17: Barra sujeta por un apoyo de pasador, y uno libre.

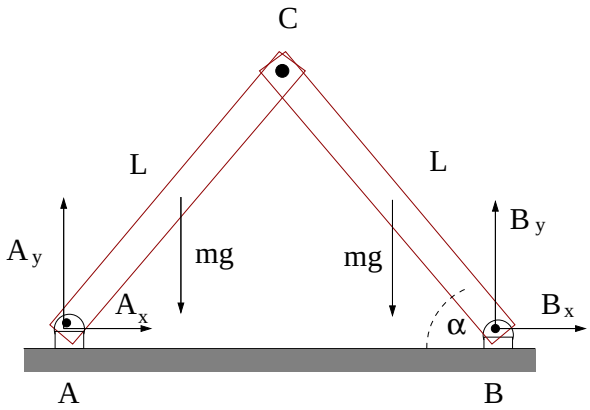


Figura 18: Dos barras articuladas sujetas por dos apoyos con pasador.

Por otra parte, si imponemos que cada una de las barras está a su vez en equilibrio, podemos encontrar B_x. En efecto, imponiendo que el momento de fuerzas con respecto al punto C (el vértice de la figura, donde ambsa barras están articuladas) sea nulo encontramos que

$$M_C = -mg\frac{L}{2}\cos\alpha + B_x\, L\,\mathrm{sen}\,\alpha + L\, B_y \cos\alpha = 0, \tag{12}$$

reemplazando el valor de B_y, y luego despejando encontramos finalmente que,

$$B_x = -\frac{m\,g}{2}\,\cot\alpha.$$

Por otra parte, del equilibrio general tenemos que $A_x + B_x = 0$, de donde

$$A_x = +\frac{m\,g}{2}\,\cot\alpha.$$

Referencias

[1] René Dugas, **Histoire de la Mécanique**, Editions Jacques Gabay, Paris, 1996. (Reimpresión autorizada de la edición original publicada por las Editions du Griffon, en Neuchatel en 1950).

[2] Russell C. Hibbeler, *Estática, Ingeniería Mecánica, Decimosegunda Edición*, Pearson Educación, México, 2010.

©Rafael Benguria, Octubre de 2014.