Momentum angular y dinámica del sólido rígido

1. Momentum angular de una partícula

Consideremos una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$. Su momentum lineal está dado por $\vec{p} = m\vec{v}$. Definiremos el *momentum angular* de la partícula con respecto a un punto O como

$$\vec{\ell}_{\mathrm{O}} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}, \tag{1}$$

en que $\vec{r}$ es el vector que va desde el punto O hasta la posición de la partícula. Aunque el momentum lineal solo depende de la masa y de la velocidad de la partícula, su momentum angular depende además del punto con respecto al cual lo estamos tomando. Tomemos por ejemplo el caso más simple de movimiento, en que la partícula se mueve con velocidad $\vec{v}$ a lo largo de una recta como se ilustra en la figura.

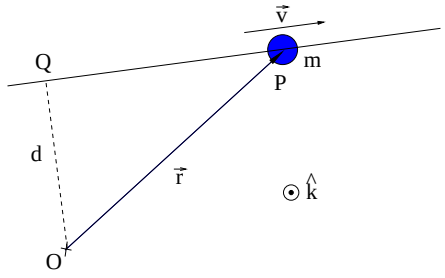


Figura 1. Momentum angular de una partícula en movimiento rectilíneo

Podemos descomponer

$$\vec{r} = \vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP},$$

de modo que

$$\vec{\ell}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \left(\vec{OQ} + \vec{QP}\right) \times m\vec{v} = \vec{OQ} \times (m\vec{v}) + \vec{QP} \times (m\vec{v}),$$

pero como $\vec{QP}$ es paralelo a $m\vec{v}$, el producto externo (producto cruz) entre ellos es nulo. Por otra parte, $\vec{OQ}$ es perpendicular a $m\vec{v}$, y por lo tanto el producto externo entre ellos tiene una magnitud $d\,m\,v$, en que d es la longitud del vector $\vec{OQ}$ y v el módulo de la velocidad. En cuanto a su dirección, de acuerdo a la regla de la mano derecha está entrando al plano de movimiento. Si llamamos $\hat{k}$ a la dirección perpendicular a la hoja, hacia afuera, entonvces, finalmente tenemos que

$$\vec{\ell}_{\rm O} = -m\,v\,d\,\hat{k}. \tag{2}$$

En este ejemplo vemos claramente la dependencia del momentum angular en la posición del punto con respecto al cual lo estamos tomando, i.e., la dependencia en el punto O. Si el punto O en cuestión está sobre la línea en que se mueve la partícula $\vec{\ell}_{\rm O} = 0$ (pues la distancia d es nula).

Consideremos como segundo ejemplo el movimiento de una partícula que se mueve con rapidez uniforme v en un círculo de radio R (i.e., el caso de una partícula en movimiento circular uniforme). En este caso conviene usar coordenadas polares (ver figura).

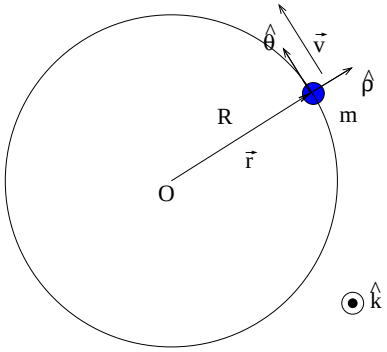


FIGURA 2. Momentum angular de una partícula en movimiento circular uniforme

Vamos a encontrar el momentum angular con respecto al centro del círculo. En este caso $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\hat{\theta} = R\omega\,\hat{\theta}$ y $\vec{r} = R\,\hat{\rho}$. Si llamamos $\hat{k}$ a la dirección perpendicular a la hoja, $\hat{\rho} \times \hat{\theta} = \hat{k}$, finalmente tenemos,

$$\vec{\ell}_{\rm O} = m\,\omega\,R^2\hat{k}. \tag{3}$$

2. Ecuación de movimiento del momentum angular y el torque

Como vimos en el capítulo 2, la evolución del momentum lineal de una partícula está determinada por la segunda ley de Newton, i.e., por

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{4}$$

en que $\vec{F}$ es la fuerza que actúa sobre la partícula. A partir de la definicón del momentum angular y de la segunda ley de Newton podemos encontrar la ecuación de movimiento del momentum angular. De hecho, a partir de la definición (1), usando la regla de Leibniz tenemos que

$$\frac{d\vec{\ell}_{\rm O}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}}. \tag{5}$$

Ahora, $d\vec{r}/dt = v$, la cual es paralela a $\vec{p} = m\vec{v}$. Así, $\dot{\vec{r}} \times \vec{p} = 0$. Por otra parte, de la segunda ley de Newton, i.e., de (4) tenemos que $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, y reemplazando en (6) finalmente tenemos que

$$\frac{d\vec{\ell}_{\rm O}}{dt} = \vec{r} \times F. \tag{6}$$

De ahora en adelante llamaremos *torque* con respecto al punto O a

$$\vec{\tau}_{\rm o} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{7}$$

Entonces, reemplazando esta expresión en (6) obtenemos que

$$\frac{d\vec{\ell}_{\rm O}}{dt} = \tau_{\rm o} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{8}$$

Comentario: Muchas veces se denomina también *Momento de Fuerzas con respecto al punto O* al torque $\vec{\tau}_{\rm o}$.

Veamos a continuación dos aplicaciones simples de la ecuación de movimiento para el momentum angular.

Ejemplo 1: *la ecuación del péndulo simple revisitada.* Consideremos nuevamente el péndulo simple, i.e., una partícula de masa m que está sometida a la gravedad y que está sujeta, por medio de una cuerda ideal de largo ℓ de un punto fijo (ver figura).

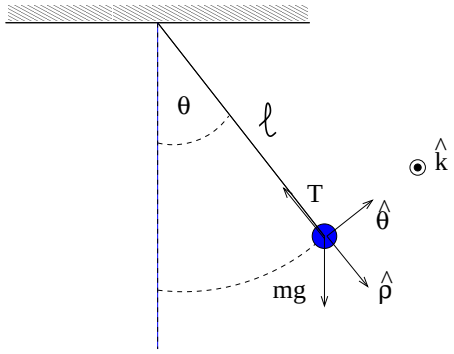


FIGURA 3. Ecuación de Movimiento del péndulo simple, usando la ecuación de torque

Consideremos el momentum angular de la partícula con respecto al punto fijo O de la figura. Usando coordenadas polares tenemos,

$$\vec{r} = \ell\,\hat{\rho}, \qquad \vec{v} = \ell\,\dot{\theta}\,\hat{\theta}, \qquad \text{y} \qquad \vec{p} = m\,\ell\dot{\theta}\,\hat{\theta}.$$

De aquí, obtenemos el momentum angular con respecto al punto O, el cual está dado por,

$$\vec{\ell_{\rm o}} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\ell^2\,\dot{\theta}\,\hat{k}, \tag{9}$$

en que $\hat{k} = \hat{\rho} \times \theta$ es el vector unitario, constante, que sale de la hoja del papel (i.e., es perpendicular al plano donde se realiza el movimiento del péndulo). Por otra parte, la fuerza total que actúa sobre la partícula es

$$\vec{F} = \vec{T} + m\,\vec{g} = -T\,\hat{\rho} + m\,g\cos\theta\hat{\rho} - m\,g\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{\theta}.$$

Reemplazando esta expresión para $\vec{F}$ en la ecuación (7) del torque, tenemos que

$$\vec{T_{\rm o}} = \vec{r} \times \vec{F} = -m\,g\,\ell\,\mathrm{sen}\,\theta\hat{k}, \tag{10}$$

en que hemos usado que $\hat{\rho} \times \hat{\rho} = 0$ y $\hat{\rho} \times \hat{\theta} = k$. Ahora usando la ecuación de torque (8) junto a (9) y (10) finalmente tenemos que

$$m\,\ell^2\,\ddot{\theta} = -m\,g\,\ell\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

i.e.,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0,$$

que es la ecuación de evolución para el péndulo simple que habíamos obtenido en el Capítulo 2.

Ejemplo 2: *El péndulo cónico.* Consideremos ahora una partícula de masa m sometida a la gravedad, suspendida por medio de una cuerda ideal de largo ℓ desde un punto fijo como en el ejemplo anterior, pero esta vez describiendo un movimiento circular uniforme con velocidad angular ω, en un plano horizontal (ver figura).

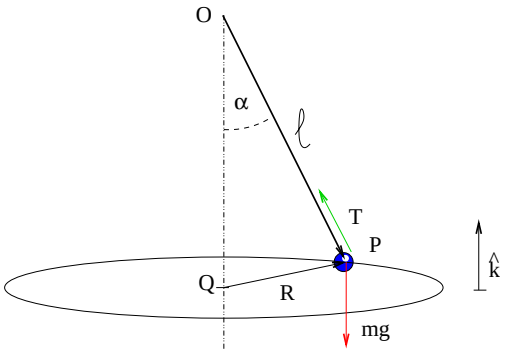


FIGURA 4. Ecuación de Movimiento del péndulo cónico, usando la ecuación de torque

Usemos coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) con origen en Q, con el eje z coincidiendo con la vertical y, con ρ y θ como coordenadas polares en el plano horizontal que contiene a P y Q.

Calculemos primero tanto el momentum angular de la partícula de masa m como el torque ejercido por las fuerzas (la tensión y el peso) sobre ella con respecto al punto Q, y luego repitamos todo con respecto al punto O (punto de suspensión) de la figura.

Ecuación de Torque, con respecto al punto Q: En este caso,

$$\ell_{\mathrm{Q}} = \vec{QP} \times (m\vec{v}). \tag{11}$$

En el sistema de coordenadas elegido,

$$\vec{QP} = \ell \operatorname{sen}\alpha\, \hat{\rho}.$$

y, usando polares y el hecho que la distancia QP es constante, tenemos que

$$\vec{v} = \ell \operatorname{sen}\alpha\, \omega\, \hat{\theta}. \tag{12}$$

Reemplazando $\vec{QP}$ y $\vec{v}$ en (11), tenemos que

$$\vec{\ell}_{\mathrm{Q}} = m\,\omega\ell^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, \hat{k}. \tag{13}$$

Nótese que, en este caso, $\vec{\ell}_{\mathrm{Q}}$ es un vector constante que apunta en la dirección vertical. Usando la ecuación de torque, i.e., (8) vemos entonces que $\vec{\tau}_{\mathrm{Q}} = 0$.

Ecuación de Torque, con respecto al punto O: En este caso,

$$\ell_{\mathrm{O}} = \vec{OP} \times (m\vec{v}). \tag{14}$$

En el sistema de coordenadas elegido,

$$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} = -\ell\cos\alpha\, \hat{k} + \ell \operatorname{sen}\alpha\, \hat{\rho}. \tag{15}$$

Finalmente, usando (15) y (12) en (14) obtenemos que

$$\vec{\ell}_{\mathrm{O}} = m\,\omega\,\ell^2 \cos\alpha\ \operatorname{sen}\alpha\, \hat{\rho} + m\,\omega\ell^2 \operatorname{sen}^2\alpha\, \hat{k}. \tag{16}$$

en que hemos usado que $\hat{k} \times \hat{\theta} = -\hat{\rho}$ y $\hat{\rho} \times \hat{\theta} = \hat{k}$. Por otra parte, el torque con respecto a O está dado por

$$\vec{\tau}_{\mathrm{O}} = \vec{OP} \times \vec{F}, \tag{17}$$

en que $\vec{OP}$ está dado por (15) y $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$ es la fuerza total que actúa sobre la partícula de masa m. Expresando $\vec{F}$ en el sistema de coordenadas que hemos elegido tenemos,

$$\vec{F} = -m\,g\,\hat{k} + T\,\cos\alpha\,\hat{k} - T\,\operatorname{sen}\alpha\,\hat{\rho}. \tag{18}$$

Reemplazando (15) y (18) en (17), obtenemos finalmente que

$$\vec{\tau}_{\mathrm{O}} = m\,g\ell\,\operatorname{sen}\alpha\,\hat{\theta}. \tag{19}$$

Usando,

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\theta} = \omega\,\hat{\theta}, \tag{20}$$

podemos calcular $d\vec{\ell}_{\mathrm{O}}/dt$ a partir de (16). La única cantidad que depende del tiempo en esa expresión es, precisamente $\hat{\rho}$, y así, a partir de (20) obtenemos,

$$\frac{d\vec{\ell}_{\mathrm{O}}}{dt} = m\,\omega^2\,\ell^2\,\operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha\,\theta. \tag{21}$$

Finalmente, de (19) y (21) y de la ecuación de torque (8) obtenemos,

$$m\,\omega^2\,\ell^2\operatorname{sen}\alpha\,\cos\alpha = m\,g\,\ell\operatorname{sen}\alpha.$$

Tenemos dos posibilidades: ó $\operatorname{sen}\alpha = 0$, ó

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2\ell}.$$

Comentario: Nótese que en este caso, el momentum angular con respecto a O (dado por (16)), realiza un movimiento de precesión con respecto al eje vertical, con velocidad angular ω y formando un ángulo $90^\circ - \alpha$ con respecto a la vertical.

3. SISTEMA DE N PARTICULAS.

Consideremos ahora un sistema de n partículas [1]. Cada una de las partículas del sistema está rotulada por su masa y por su vector posición. Llamaremos m_i a la masa de la pertícula i y $\vec{r}_i$ a su posición. Las partículas del sistema interactúan entre sí y también interactúan con el medio externo. Si llamamos $\vec{F}_{i,j}$ a la fuerza que ejerce la partícula j sobre la partícula i, y $\vec{F}_{i,\text{ext}}$ a la fuerza que ejerce el medio externo sobre la partícula i, tendremos que la fuerza total sobre la partícula i está dada por

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{i,\text{ext}}. \tag{22}$$

Si llamamos $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$ a la velocidad de la partícula i, su momentum está dado por $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$, y de acuerdo a la segunda Ley de Newton, su ecuación de movimiento está dada por

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i. \tag{23}$$

Si sumamos (23) en i, desde $i = 1$ hasta $i = n$, y recordamos la Ley de Acción y Reacción en forma débil (i.e., $\vec{F}_{i,j} = -\vec{F}_{j,i}$), obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,\text{ext}} \equiv \vec{F}_{\text{ext}}. \tag{24}$$

Dada la estructura de la ecuación (24), conviene definir el **Centro de Masa** del sistema, a través de su vector posición

$$\vec{R}_{\text{cm}} \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i, \tag{25}$$

en que $M \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i$ representa la masa total del sistema. Consistentemente llamaremos

$$\vec{P}_{\text{cm}} \equiv M\dot{\vec{R}}_{\text{cm}} = M\,\vec{V}_{\text{cm}}. \tag{26}$$

Con estas definiciones la ecuación (24) toma la forma simple

$$\frac{d\vec{P}_{\text{cm}}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}. \tag{27}$$

[1] La primera parte de esta sección es un repaso de la sección equivalente que discutimos en el capítulo 4.

La interpretación de esta ecuación es muy simple: el centro de masa del sistema se mueve como si fuera una partícula sometida a una fuerza equivalente a la suma de las fuerzas externas actuando sobre el sistema. Así, por ejemplo, si lanzamos una silla por el aire, a pesar que la silla realizará un movimiento de rotación relativamente complicado, su centro de masa describirá una simple parábola, pues en este caso la fuerza total externa actuando sobre la silla va a ser simplemente su peso $M\vec{g}$, y la ecuación de movimiento de la posición del Centro de Masa es simplemente,

$$\frac{d^2\vec{R}_{\rm cm}}{dt^2} = \vec{g}.$$

Ya hemos visto que la ecuación de movimiento del centro de masa es muy simple. Con el objeto de describir la evolución del resto del sistema es conveniente introducir coordenadas relativas al centro de masa. Es natural definir el vector posición de la partícula i con respecto al centro de masa como

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}_{\rm cm}. \tag{28}$$

De la definición del centro de masa y de las coordenadas relativas al centro de masa se sigue de inmediato que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' = 0, \tag{29}$$

(en palabras ésto simplemente quiere decir que en el sistema de coordenadas relativas al centro de masa la posición del centro de masa está en el origen; en todo caso, para derivar (29), multiplique (28) por m_i y sume en i desde $i = 1$ hasta n y usando (25) el valor de esta suma es cero). Derivando (29) con respecto al tiempo se obtiene también

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{r}}_i' = 0, \tag{30}$$

A continuación derivaremos teoremas de descomposición para la energía cinética y para el momentum angular del sistema de partículas.

Ya hemos visto anteriormente que la energía cinética es aditiva, es decir, la energía cinética total del sistema de n partículas es la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas. Así,

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2}. \tag{31}$$

Reemplazando en (31) $\vec{r}_i$ en términos de $\vec{r}_i'$, utilizando (28) obtenemos de inmediato,

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{R}}_{\rm cm} \cdot \dot{\vec{R}}_{\rm cm} + 2\dot{\vec{R}}_{\rm cm} \cdot \dot{\vec{r}}_i' + \dot{\vec{r}}_i' \cdot \dot{\vec{r}}_i') \tag{32}$$

Usando (30) vemos que el segundo término de la expresión anterior es nulo (note que $\dot{\vec{R}}_{\rm cm}$ no depende del índice de suma). Por otra parte, el primer término es precisamente

$$\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{\rm cm}^{\,2} = \frac{1}{2} M\, V_{\rm cm}^2 \equiv K_{\rm cm}, \tag{33}$$

el cuál corresponde a la energía cinética del centro de masa. El último término en (32) corresponde a la energía cinética del sistema relativa al centro de masa (i.e., en el sistema en que el centro de masa está en reposo) y la denominaremos por $K_{\rm cr/cm}$. Así pues,

$$K = K_{\rm cm} + K_{\rm cr/cm} \tag{34}$$

en que $K_{\rm cm}$ está dado por (33) y

$$K_{\rm cr/cm} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i' \cdot \dot{\vec{r}}_i') \tag{35}$$

Una descomposición análoga se puede obtener para el momentum angular del sistema de n partículas. Tal como la energía cinética, el momentum angular es aditivo. Así, el momentum angular del sistema con respecto a un punto fijo O está dado por

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times (m_i \dot{\vec{r}}_i). \tag{36}$$

Siguiendo exactamente el mismo procedimiento anterior, ahora reemplazamos en (36)$\vec{r}_i$ en términos de $\vec{r}_i'$ usando (28). De este modo obtenemos

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{R}_{\rm cm} \times (m_i \dot{\vec{R}}_{\rm cm}) + \vec{R}_{\rm cm} \times (m_i \dot{\vec{r}}_i') + \vec{r}_i' \times (m_i \dot{\vec{R}}_{\rm cm}) + \vec{r}_i' \times (m_i \dot{\vec{r}}_i') \right]. \tag{37}$$

El primer término de esta expresión es precisamente $\vec{R}_{\rm cm} \times (M\dot{\vec{R}}_{\rm cm}) = \vec{R}_{\rm cm} \times \vec{P}_{\rm cm}$ que corresponde al momentum angular del centro de masa con respecto a O y que denotaremos como $\vec{L}_{\rm cm,O}$. El segundo término en (37) se anula debido a (30), en tanto que el tercer término se anula debido a (29). Finalmente, el último término equivale al momentum angular que tiene el conjunto de partículas con respecto al centro de masa, y lo denotaremos por $\vec{L}_{\rm cr/cm}$. Resumiendo,

$$\vec{L}_{\rm O} = \vec{L}_{{\rm cm},O} + \vec{L}_{\rm cr/cm}, \tag{38}$$

con

$$\vec{L}_{{\rm cm},O} = \vec{R}_{\rm cm} \times (M\dot{\vec{R}}_{\rm cm}) = \vec{R}_{\rm cm} \times \vec{P}_{\rm cm}, \tag{39}$$

y

$$\vec{L}_{\rm cr/cm} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times (m_i \dot{\vec{r}}_i'). \tag{40}$$

4. Cinemática del Sólido Rígido: Dos Dimensiones

Un sólido rígido es un caso particular se sistema de muchas partículas. El modelo de sólido que aquí consideraremos es un conjunto de partículas tal que la distancia entre cada par de partículas se mantiene constante. Antes de discutir la dinámica del sólido rígido, discutamos brevemente que tipo de movimientos puede un sólido rígido realizar, y como podemos describir dichos movimientos. Primero pensemos en un sólido que tiene solamente la libertad de moverse en un plano (esto es lo que llamaremos el movimiento del sólido en dos dimensiones). Existen dos movimientos característicos que el sólido puede hacer. Por una parte puede trasladarse en cualquiera de las dos direcciones en el plano, por otra puede rotar. Cuando el sólido solamente se traslada (sin rotar), debido a que las distancias entre los distintos puntos del sólido se mantienen constantes, todos los puntos se mueven con la misma velocidad. Esta velocidad tiene que ser por tanto la velocidad del centro de masa $\dot{\vec{R}}_{\rm cm}$. Por otra parte si el sólido rota con respecto a un eje que pasa por

su centro de masa, por la misma razón anterior, todos los puntos del sólido se mueven con la misma velocidad angular, digamos ω. De este modo solo bastan tres coordenadas para describir el movimiento del sólido rígido en dos dimensiones: las dos componentes de la posición del centro de masa $\vec{R}_{\rm cm} = (x_{\rm cm}, y_{\rm cm})$, que describen el movimiento de traslación del sólido, y la orientación del sólido con respecto a un eje fijo, la cual se mide a través de un ángulo (el ángulo θ de la figura (**??**)) y que da cuenta del movimiento de rotación del sólido (con respecto a un eje fijo que pasa por su centro de masa). La velocidad angular del sólido es precisamente $\omega = d\theta/dt$.

Todavía haremos dos consideraciones adicionales antes de ir a estudiar la dinámica del sólido rígido. Por una parte adaptaremos la expresión (25) del centro de masa para el caso de una distribución continua de masa. Por otra encontraremos expresiones simples tanto para $K_{\rm cr/cm}$ como para $\vec{L}_{\rm cr/cm}$ en terminos de la velocidad angular ω del sólido.

Con el objeto de encontrar una expresión para la posición del centro de masa del sólido rígido (en dos dimensiones), conviene pensar en éste como compuesto de pequeños cuadrados de área ΔS. Si llamamos σ a la densidad de masa del sólido, entonces la masa del cuadradito de área ΔS situado alrededor del punto $\vec{r}$ está dada por $\sigma(\vec{r})\Delta S$. Nótese que a menos que el sólido en cuestión sea homogéneo, la densidad de masa σ es función de posición. Con estas consideraciones en mente y utilizando (25) encontramos que

$$\vec{R}_{\rm cm} = \frac{1}{M} \sum \left(\sigma(\vec{r})\Delta S\right) \vec{r}, \tag{41}$$

en que la suma se extiende sobre los n distintos cuadraditos en que hemos descompuesto el sólido y $\vec{r}$ representa genericamente el centro de cada cuadradito. Si el número n de cuadraditos en que hemos descompuesto el sólido es muy grande (y por lo tanto el área de cada uno de los cuadraditos ΔS es muy pequeña) la suma (41) es una aproximación (suma de Riemann) de la siguiente integral

$$\vec{R}_{\rm cm} = \frac{1}{M} \int \sigma(\vec{r})\vec{r}\, dS, \tag{42}$$

en que la integral se extiende por toda el área del sólido en cuestión.

Para los sólidos más comunes es muy fácil determinar la posición del centro de masa sin necesidad de recurrir a (42). Por ejemplo, para un disco homogéneo, su centro de masa es

precisamente el centro del disco. Una situación similar ocurre con una varilla homogénea o con una esfera homogénea. En ambos casos el centro de masa es el centro geométrico de estas figuras. Sin embargo, para situaciones más generales, debemos apelar a (42) para determinar la posición del centro de masa.

Ejemplo: Consideremos un semicilindro de radio a y masa m, como se indica en la figura (**??**).

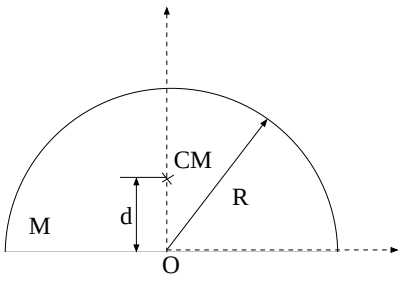


FIGURA 5. Centro de Masa y Momento de Inercia de un semicilindro

Determinaremos ahora la posición del centro de masa de este cuerpo. Elijamos ejes cartesianos como se indican en la figura. Podemos representar la posición $\vec{r}$ de un punto cualquiera del semicilindro como

$$\vec{r} = r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath}. \tag{43}$$

En la expresión anterior, r varía entre 0 y a (el radio del semicilindro) y el ángulo θ entre 0 y π. En términos de r y θ es muy simple expresar los límites del semicilindro (su manto está dado por $r = a$ en tanto que su base por $\theta = 0$ y $\theta = \pi$), y es por eso que utilizamos estas coordenadas para hacer el presente cálculo. El elemento de superficie está dado por $dS = r\,dr\,d\theta$ (nótese que si usamos coordenadas polares hemos dividido nuestra figura en pequeños sectores circulares mas que en cuadraditos, tal como se ilustra en la figura (**??**)).

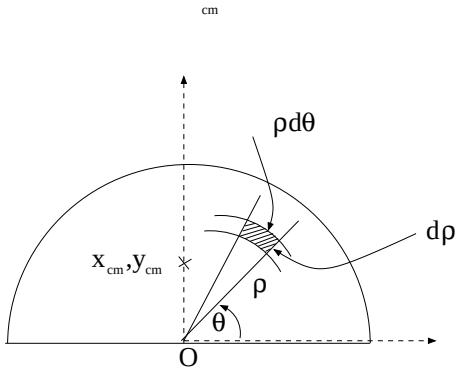


FIGURA 6. Cálculo del Centro de Masa y del Momento de Inercia del Semicilindro

Reemplazando (43) y dS en (42) obtenemos

$$\vec{R}_{\rm cm} = \frac{1}{M}\int_0^a \int_0^\pi \sigma(r\cos\theta\,\hat{\imath} + r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\jmath})\, r\, dr\, d\theta = \frac{2}{3}\frac{\sigma}{M}a^3\hat{\jmath}. \tag{44}$$

Per la superficie del semicilindro es $A = \pi a^2/2$, de modo que su masa es $M = \sigma\pi a^2/2$, así es que finalmente de (44) obtenemos

$$\vec{R}_{\rm cm} = \frac{4\pi}{3\pi}\hat{\jmath}. \tag{45}$$

Las expresiones que obtuvimos en la sección anterior para la energía cinética y el momentum angular con respecto al centro de masa ($K_{\rm cr/cm}$ y $\vec{L}_{\rm cr/cm}$ de un sistema de n partículas adoptan una forma muy simple cuando se trata de un sólido (en dos dimensiones). Si mantenemos el centro de masa del sólido fijo, el único movimiento que éste puede realizar es una rotación. Cada punto del sólido describirá un círculo alrededor del centro de masa. El radio del círculo corresponde a la distancia del punto en cuestión al centro de masa. Al igual que en la discusión que precede a la ecuación (41), consideremos al sólido rígido como compuesto de n cuadraditos, de área ΔS. En la figura (**??**) ilustramos

el movimiento del cuadradito i en torno al centro de masa. Si llamamos $\vec{r}_i'$ a su vector posición, el cuadradito en cuestión describe un círculo de radio $|\vec{r}_i'|$ en torno a $\vec{R}_{\rm cm}$. Su velocidad $\dot{\vec{r}}_i'$ es tangente al círculo y su magnitud está dada por $|\vec{r}_i'|\omega$. Reemplazando estas expresiones en (35), la energía cinética con respecto al centro de masa será

$$K_{\rm cr/cm} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i |\vec{r}_i'|^2 \omega^2. \tag{46}$$

Puesto que la velocidad angular ω es común a todos los cuadraditos, podemos factorizarla fuera de la suma y obtener

$$K_{\rm cr/cm} = \frac{1}{2} I_{\rm cm} \omega^2, \tag{47}$$

en que hemos definido

$$I_{\rm cm} \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i |\vec{r}_i'|^2. \tag{48}$$

$I_{\rm cm}$ se conoce como el **Momento de Inercia** del sólido rígido con respecto al eje que pasa por el centro de masa. Tomando el número de cuadraditos a infinito y el área de cada uno de ellos a cero, del modo que lo hicimos anteriormente, (48) converge a

$$I_{\rm cm} = \int \sigma(\vec{r}\,) |\vec{r}\,|^2 \, dS, \tag{49}$$

en que la integral se extiende sobre toda la superficie del sólido. Aquí, $\vec{r}$ recorre todos los puntos de la superficie, $\sigma(\vec{r}\,)$ es la densidad de masa en el punto $\vec{r}$ y dS es el elemento de superficie en torno a $\vec{r}$. Nótese que el momento de inercia es un escalar positivo, que depende no sólo de la masa del cuerpo sino que también de su geometría. En el Sistema Internacional de Unidades, el momento de inercia se mide en kg–m^2.

Antes de discutir una deducción análoga para el momentum angular con respecto al centro de masa, conviene introducir el **vector velocidad angular** $\vec{\omega}$. Definiremos $\vec{\omega}$ como un vector cuya dirección coincide con la del eje de rotación y su magnitud con ω (es decir su magnitud es precisamente lo que hemos convenido en llamar la velocidad angular). Para el movimiento del sólido rígido en dos dimensiones (digamos en el plano de esta hoja de papel), $\vec{\omega}$ siempre es perpendicular a la hoja. Convendremos que apunta hacia afuera si el cuerpo gira en el sentido contrario a la agujas del reloj y hacia dentro si el cuerpo

gira en el sentido de los punteros del reloj. En otras palabras seguimos la *regla de la mano derecha*: Si la velocidad angular apunta a lo largo del pulgar, el cuerpo rota en la dirección del resto de los dedos.

Con esta definición de $\vec{\omega}$, es simple ver que

$$\vec{v}_i' \equiv \dot{\vec{r}}_i' = \vec{\omega} \times \vec{r}_i'. \tag{50}$$

Nótese que como $\vec{\omega}$ es perpendicular al papel y tanto $\vec{r}_i'$ como $\vec{v}_i'$ están contenidos en el plano del papel, $\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i' = \vec{\omega} \cdot \vec{r}_i' = 0$. Ahora regresamos al cálculo de $\vec{L}_{\mathrm{cr/cm}}$. Reemplazando (50) en (40) tenemos

$$\vec{L}_{\mathrm{cr/cm}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i'). \tag{51}$$

Para tres vectores cualquiera, $\vec{a}$, $\vec{b}$, y $\vec{c}$, se tiene

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Usando esta identidad con nuestros vectores $\vec{r}_i'$, $\vec{\omega}$ y $\vec{v}_i'$, recordando que $\vec{r}_i'$ y $\vec{v}_i'$ son ortogonales a $\vec{\omega}$, obtenemos a partir de (51)

$$\vec{L}_{\mathrm{cr/cm}} = I_{\mathrm{cm}}\vec{\omega}, \tag{52}$$

en que el momento de inercia está dado por (49) en el límite continuo.

Antes de ir a la dinámica del sólido rígido, calculemos el momento de inercia para los sólidos rígidos de geometría simple. El caso más sencillo corresponde al de un anillo homogéneo de radio a y masa m. Obviamente el centro de masa coincide con el centro del anillo. Como todos los puntos del anillo están a distancia a del centro de masa, obtenemos de inmediato, a partir de (49),

$$I_{\mathrm{anillo}} = ma^2. \tag{53}$$

Ahora podemos calcular el momento de inercia de un disco macizo, homogéneo, de radio a y masa m. Nuevamente el centro de masa del disco coincide con el centro del disco. Si usamos coordenadas polares (r, θ) para describir los distintos puntos del disco (con

r variando entre 0 y a y θ entre 0 y 2π), el elemento de superficie dS queda dado por $dS = r\,dr\,d\theta$, y $\vec{r}^{\,2} = r^2$. Reemplazando en (49) obtenemos

$$I_{\text{disco}} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sigma r^3\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\pi\sigma a^4 = \frac{1}{2}ma^2, \tag{54}$$

puesto que la masa del disco es $\sigma(\pi r^2)$.

Como tercer ejemplo podemos calcular el momento de inercia de una rueda de radio interior a y radio exterior b, homogénea, de masa m. Como en los dos casos anteriores, el centro de masa de la figura está en el centro del anillo. Usando polares nuevamente, obtenemos de inmediato

$$I_{\text{rueda}} = \int_a^b \int_0^{2\pi} \sigma r^3\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\pi\sigma(b^4 - a^4) = \frac{1}{2}m(a^2 + b^2), \tag{55}$$

puesto que la masa de la rueda está dada por $\sigma\pi(b^2 - a^2)$. Nótese que (55) incluye como casos particulares los dos casos anteriores (para el anillo basta tomar $a = b$ en (55) en tanto que para el disco macizo basta tomar $a = 0$.

En el apéndice a este capítulo calculamos el momento de inercia de otros cuerpos.

5. Dinámica del Sólido Rígido: Dos Dimensiones.

En esta sección encontraremos las ecuaciones de movimiento del sólido rígido en dos dimensiones. Las coordenadas que describen el movimiento del sólido son la posición del centro de masa y el ángulo de rotación. Puesto que un sólido rígido es un caso especial de sistemas de n partículas, la evolución del centro de masa del sólido estará dada por (27) tal como en el caso general. Entonces solo nos resta por determinar la ecuacion de movimiento para el ángulo de rotación. Si dividimos el sólido en cuestión en n cuadraditos, y llamamos $\vec{r}_i$ al vector posición del i-ésimo cuadradito, la ecuación de movimiento de ésta será precisamente (23) en que $\vec{F}_i$ está dado por (22). Llamemos $\vec{\ell}_i$ al momentum angular del i-ésimo cuadradito, i.e.,

$$\vec{\ell}_i \equiv \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{r}_i \times (m_i \dot{\vec{r}}_i). \tag{56}$$

Derivando ℓ_i con respecto al tiempo tenemos

$$\frac{d\vec{\ell_i}}{dt} = \vec{r_i} \times (\frac{d\vec{p_i}}{dt}), \tag{57}$$

(nótese que al derivar (56) con respecto al tiempo, uno de los términos se anula pues $\dot{\vec{r}}_i$ es paralelo a $\vec{p}_i = m_i\dot{\vec{r}}_i$). Pero $d\vec{p}_i/dt = \vec{F}_i$ (con $\vec{F}_i$ dado por (22), de modo que

$$\frac{d\vec{\ell_i}}{dt} = \vec{r_i} \times \vec{F}_i = \vec{r_i} \times \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{i,\text{ext}} \right) \tag{58}$$

Como hemos indicado anteriormente, el momentum angular es aditivo (i.e., el momentum angular total del sistema es igual a la suma de los momentos angulares de las partículas componentes. Llamemos pués $\vec{L}_\text{O}$ al momentum angular del sólido rígido con respecto al punto fijo O. De acuerdo a lo anterior, y usando (58) obtenemos,

$$\frac{d\vec{L}_\text{O}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{i,j} + \vec{F}_{i,\text{ext}} \right). \tag{59}$$

Como los índices de suma pueden tener cualquier nombre, podemos reescribir el primer término del lado derecho de (59) como,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \vec{F}_{i,j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \vec{r_j} \times \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \vec{F}_{j,i}.$$

Por la ley de acción y reacción en forma débil tenemos que $F_{j,i} = -F_{i,j}$, y entonces podemos reagrupar las dos sumas de la ecuación anterior como

$$\frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{i=1,j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\vec{r_i} - \vec{r_j}) \times \vec{F}_{i,j} \right).$$

Finalmente, usando la Ley de Acción y Reacción en forma fuerte, $F_{i,j}$ es paralelo a la línea que une a las partículas i y j, i.e., es proporcional a $\vec{r_i} - \vec{r_j}$, de modo que $(\vec{r_i} - \vec{r_j}) \times \vec{F}_{i,j} = 0$ para todo par (i, j). De este modo todos los torque internos se cancelan, y finalmente

podemos reescribir (59) como,

$$\frac{d\vec{L}_{\rm O}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\rm ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{i,\rm O} = \tau_{\rm O}^{\rm ext}, \tag{60}$$

i.e., la variación del momentum angular total del sistema con respecto al punto O es igual al torque externo total (con respecto al punto O) actuando sobre el sólido.

6. Ecuación de Torque con respecto al Centro de Masa

En los problemas de dinámica del sólido rígido en dos dimensiones resulta muy conveniente utilizar la ecuación de movimiento asociada a as variaciones del momentum angular con respecto al Centro de Masa. Vamos a demostrar a continuación que,

$$\frac{d\vec{L}_{\rm cr/cm}}{dt} = \vec{\tau}_{\rm cr/cm} \tag{61}$$

Si usamos la ecuación (60) y el Teorema de Descomposición del Momentum Angular, i.e., (38), con $\vec{L}_{\rm cm,O}$ y $\vec{L}_{\rm cr/cm}$ dadod por (39) y (40) respectivamente, obtenemos que

$$\frac{d\vec{L}_{\rm O}}{dt} + \frac{d\vec{L}_{\rm cr/cm}}{dt} = \vec{\tau}_{\rm O}^{\rm ext}. \tag{62}$$

Pero,

$$\vec{\tau}_{\rm O}^{\rm ext} \equiv \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i,\rm ext}, \tag{63}$$

y, usando las coordenadas con respecto al Centro de Masa, i.e., los $\vec{r}_i\,'$, podemos escribir, $\vec{r}_i = \vec{R}_{\rm cm} + \vec{r}_i\,'$. Reemplazando esta expresión en (63) obtenemos,

$$\vec{\tau}_{\rm O}^{\rm ext} = \vec{R}_{\rm cm} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i,\rm ext} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_{i,\rm ext} = \vec{R}_{\rm cm} \times \vec{F}_{\rm ext} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_{i,\rm ext}. \tag{64}$$

Pero,

$$\frac{d\vec{L}_{\rm O}}{dt} = \vec{R}_{\rm cm} \times \vec{F}_{\rm ext}, \tag{65}$$

y así, de (62), (63), y (64) obtenemos finalmente,

$$\frac{d\vec{L}_{\rm cr/cm}}{dt} = \vec{\tau}_{\rm cr/cm} \tag{66}$$

en que,

$$\vec{\tau}_{\mathrm{cr/cm}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_{i,\mathrm{ext}} \tag{67}$$

7. Resolución de problemas de dinámica del sólido rígido en dos dimensiones.

Tal como vimos en el Capítulo 2, es conveniente seguir un protocolo bien establecido para resolver la dinámica de sistemas de varios cuerpos, incluyendo sólidos rígidos en dos dimensiones. El protocolo consiste en los siguientes siete puntos (que guardan similitud con los puntos del protocolo discutido en el Capítulo 2. Los puntos a seguir son los siguientes:

1) Identificar todos los cuerpos.

2) Para cada cuerpo, a) identificar todas las fuerzas que actúan sobre el, identificando claramente para cada una de ellas los puntos de aplicación de las mismas; b) y para cada cuerpo que puede girar, determinar todos los torques con respecto al centro de masa que actúan sobre él.

3) Para cada cuerpo determinar las coordenadas necesarias para: a) describir el movimiento del Centro de Masa, y b) la rotación del cuerpo con respecto al Centro de Masa.

4) Escribir para cada cuerpo la ecuación de movimiento del centro de masa y la ecuación de torque con respecto al centro de masa.

5) Escribir todas las ecuaciones de ligadura, incluyendo las condiciones de rodar sin resbalar.

6) Resolver las ecuaciones de movimiento y de ligazón para todas las incógnitas del problema (aceleraciones del centro de masa, aceleraciones angulares con respecto al centro de masa y fuerzas de ligazón, las que incluyen Normales, Tensiones y Fuerzas de Roce).

7) Verificar los resultados.

A continuación ilustramos el uso de este protocolo en algunos problemas simples. Empezamos con el descenso de un cilindro homogéneo de masa M, radio R, que cae, rodando sin resbalar, por un plano inclinado de ángulo α.

En este problema hay un solo cuerpo que se mueve, i.e., el cilindro de masa M y radio R. Sobre el cilindro actúan tres fuerzas (que se indican en la figura)

Ejemplo 2: *Movimiento de una escalera que cae.* Considere una escalera homogénea de masa M y largo ℓ que está apoyada en el suelo y en el piso tal como se indica en la figura. Suponga que inicialmente la escalera está en reposo y forma un ńgulo θ_0 con el suelo y que no hay roce entre la escalera y la pared ó entre la escalera y el piso. Encuentre la ecuación de movimiento de la escalera, y el ángulo θ_d que hace la escalera con el piso cuando esta se despega de la pared.

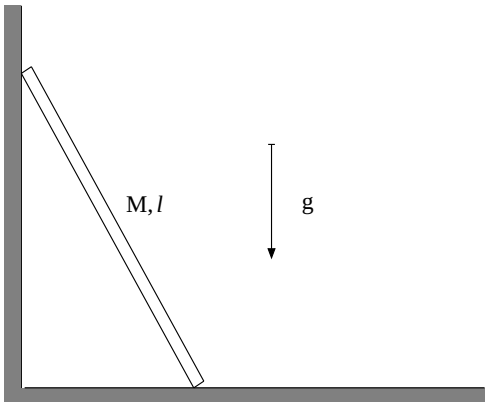


FIGURA 7. Escalera que resbala apoyada en la pared y en el suelo

Nota: Este problema está discutido en muchos textos. Ver por ejemplo: S. B. Cahn, and B. E. Nadgorny, *A Guide to Physics Problems, part 1. Mechanics, Relativity and Electrodynamics*, Plenum Press, New York, 1994, página 16, problema 1.28.

Solución: Como las superficies son *lisas* (i.e., no hay roce entre la escalera y la superficies de apoyo, se conserva la energía. Usando la conservación de la energía de la escalera no es difícil encontrar la ecuación de movimiento que describe la evolución de la escalera. Como la escalera es homogénea, la posición de su centro de masa está en el centro de ésta, i.e., a distancia $\ell/2$ de cada uno de los extremos. Llamemos x_{CM}, e y_{CM} a las coordenadas del centro de masa, referidas al sistema cartesiano de la figura (en que el eje x coincide con el piso, y el eje y con la pared donde se apoya la escalera; la escalera misma se encuentra en el primer cuadrante como se inica en la figura). Llamemos θ al ángulo que forma la escalera con el piso (como se indica en la figura: i.e., la dirección de crecimiento de θ es a lo largo de los punteros del reloj). Mientras la escalera está apoyada en ambos extremos, las coordenadas del centro de masa de la escalera se pueden determinar como función de θ. De la figura vemos que,

$$x_{CM} = \frac{\ell}{2}\cos\theta \tag{68}$$

en tanto que,

$$y_{CM} = \frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{69}$$

(nótese que de estas dos ecuaciones tenemos que $x_{CM}^2 + y_{CM}^2 = \ell^2$, i.e., mientras la escalera está apoyada en ambos extremos, su centro de masa se mueve sobre un círculo de radio $\ell/2$). A partir de (68) y (69), podemos calcular las componentes cartesianas de la velocidad del centro de masa. Así obtenemos,

$$\dot{x}_{CM} = -\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\dot{\theta} \tag{70}$$

e,

$$\dot{y}_{CM} = \frac{\ell}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}. \tag{71}$$

Entonces, la energía cinética del centro de masa de la escalera está dada por,

$$K_{CM} = \frac{1}{2}M\,V_{CM}^2 \equiv \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{CM}^2 + \dot{y}_{CM}^2\right) = \frac{1}{8}M\ell^2\dot{\theta}^2. \tag{72}$$

Por otra parte, si elegimos el eje z saliendo de la página (i.e., $\hat{k}$ apuntando hacia afuera), de acuerdo a la regla de la mano derecha, el vector velocidad angular que describe el movimiento de rotación de la escalera está dado por,

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{k}. \tag{73}$$

Como el momento de inercia de la escalera (con respecto al centro de masa) está dado por $I = M\ell^2/12$ (pues se trata de una varilla homogénea de masa M y de largo ℓ, la energícinética con respecto al centro de masa de la escalera está dada por,

$$K_{cr/CM} = \frac{1}{2} I\,\omega^2 \equiv \frac{1}{24} M\ell^2\dot{\theta}^2. \tag{74}$$

Sumado las dos contribuciones, usando el *Teorema de Descomposición* de la energícinética, obtenemos la energía cinética total de la escalera,

$$K = K_{CM} + K_{cr/CM} = \left(\frac{1}{8+}\frac{1}{24}\right) M\ell^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{6} M\ell^2\dot{\theta}^2. \tag{75}$$

Por otra parte, si elegimos el nivel del piso como nivel de referencia de la energía potencial gravitatoria, la energía potencial de la escalera está dada por

$$V(\theta) = M\,g\,y_{CM} = M\,g\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta. \tag{76}$$

Entonces, de (75) y (76) obtenemos la energía total de la escalera,

$$E = K + V = \frac{1}{6} M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\,g\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta. \tag{77}$$

Si usamos el hecho que inicialmente $\dot{\theta}(0) = 0$ y $\theta(0) = \theta_0$, a partir de (eq:5.a.10) obtenemos, $E = M\,g(\ell/2)\operatorname{sen}\theta_0$, de modo que,

$$\frac{1}{6} M\ell^2\dot{\theta}^2 + M\,g\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta = M\,g\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\theta_0,$$

y así,

$$\dot{\theta}^2 = 3\frac{g}{\ell}(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta_0). \tag{78}$$

Derivando (78) con respecto al tiempo, obtenemos la ecuación de movimiento para θ,

$$\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\theta = 0, \tag{79}$$

la cual es una ecuación diferencial de segundo orden, no lineal, para θ. Usando está ecuación diferencial y el estado inicial $\theta(0) = \theta_0$, y $\dot{\theta}(0) = 0$, se puede determinar la evolución $\theta(t)$ de la posición de la escalera.

Nota: Esta ecuación se puede resolver en forma analítica en términos de funciones elípticas de Jacobi, pero eso va mas allá del nivel de este curso. Por otra parte este problema de valores iniciales se puede resolver numericamente usando MAPLE, MATLAB, MATHEMATICA, u otros softwares de análisis numérico.

Con el objeto de determinar el ángulo de despegue de la pared, usamos la componente horizontal de la ecuación de movimiento del centro de masa de la escalera. A partir de (70) podemos calcular la componente horizontal de la aceleración del centro de masa, la que está dada por

$$\ddot{x}_{CM} = -\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta} - \frac{\ell}{2}\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2. \tag{80}$$

Si llamamos $\vec{R} = R\hat{\imath}$ a la reacción de la pared sobre la escalera (la cual es perpendicular a la pared, i.e., paralela al eje x), la componente horizontal de la ecuación de movimiento del centro de masa queda dada por,

$$R = M\,\ddot{x}_{CM} = -M\frac{\ell}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\ddot{\theta} - M\frac{\ell}{2}\,\cos\theta\,\dot{\theta}^2. \tag{81}$$

(Nótese que $\vec{R}$ es la única fuerza que tiene componente horizontal). Como es habitual, la condición de despegue es $R = 0$. Así, en el momento que la escalera se despega de la pared, de (81) tenemos,

$$\mathrm{sen}\,\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\dot{\theta}^2 = 0,$$

y, usando las expresiones para $\ddot{\theta}$ y $\dot{\theta}^2$ obtenidas en (78) y (79) respectivamente, obtenemos,

$$\mathrm{sen}\,\theta\frac{3g}{2\ell}\cos\theta + \cos\theta\,3\frac{g}{\ell}(\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}\,\theta_0). \tag{82}$$

Simplificando, finalmente obtenemos que el ángulo de despegue, θ_d, está dado por,

$$\mathrm{sen}\,\theta_d = \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,\theta_0.$$

Es decir,

$$\theta_d = \text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\,\text{sen}\,\theta_0\right).$$

Por ejemplo, si $\theta_0 = 60°$, $\theta_d = \text{arcsen}(\sqrt{3}/3) \approx 35,24°$.

Ejercicio: *Cil*
in dro homogéneo de masa m, radio R, y momento de inercia I, rodando sin resbalar por un plano inclinado: En la clase anterior ya estudiamos el descenso de un cilíndro que rueda sin rebalar a lo largo de un plano inclinado, usando las reglas de la dinámica. Ahora lo revisaremos, usando conservación de energía.

Ejercicio: *El yo–yo desenrollándose.* En la clase anterior usamos las ecuaciones de la dinámica para calcular la aceleración de un yo–yo que estando sujeto por una cuerda ideal desde un punto fijo O se está desenrollando, como se indica en la figura. Esta vez queremos rderivar el resultado obtenido, pero usando conservación de energía. Supongamos, como en la clase anterior que el yo–yo consiste en un disco macizo, homogéneo, de masa m y de de radio R, y que queremos encontrar la aceleración vertical del centro de masa y la aceleración angular con respecto al centro de masa.

Solución: Usaremos las mismas coordenadas que usamos para este problema anteriormente (ver clase anterior). El centro de masa del cilindro se mueve en forma vertical, y su rapidez es $\dot{s}$. Así, la energía cinética del centro de masa del yo–yo, está dada por,

$$K_{CM} = \frac{1}{2}m\dot{s}^2. \tag{83}$$

Ahora encontraremos la energía cinética con respecto al centro de masas del yo–yo. Como vimos en la clase pasada,

$$\vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{k}.$$

Por otra parte, como el yo–yo es un disco macizo homogéneo, su centro de masa está en el centro del cilindro, y su momento de inercia (con respecto al centro de masa) está dado

por $I = mR^2/2$. Entonces, la energícinética con respecto al centro de masa está dada por,

$$K_{cr/CM} = \frac{1}{2} I\dot{\omega}^2 = \frac{1}{4} m\, R^2\dot{\theta}^2. \tag{84}$$

Usando la condición de rodar sin resbalar (ver clase anterior), tenemos que $\dot{s} = R\dot{\theta}$, de modo que finalmente la energía cinética total del yo–yo es,

$$K = K_{CM} + K_{cr/CM} = \frac{1}{2} m\dot{s}^2 + \frac{1}{4} m\, R^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m\dot{s}^2, \tag{85}$$

(en que la última igualdad sigue de usar la condición de rodadura, $\dot{s} = R\dot{\theta}$). Por otra parte, escogiendo el nivel del techo como nivel de referencia para el potencial gravitatorio, tenemos que la energía potencial del yo–yo estádada por

$$V(s) = -m\, g\, s. \tag{86}$$

De estas dos últimas ecuaciones obtenemos la energía total del yo–yo, la que está dada por,

$$E = K + V = \frac{3}{4} m\dot{s}^2 - m\, g\, s. \tag{87}$$

Como la tensión no hace trabajo, se conserva la enrgía del yo–yo, i.e., E es una constante. Derivadno (87) con respecto al tiempo, finalmente obtenemos,

$$\ddot{s} = \frac{2}{3} g,$$

que es, por supuesto, el mismo resultado que habíamos obtenido anteriormente usando las ecuaciones de dinámica. De la relación entre $\dot{\theta}$ y $\dot{s}$ obtenemos la aceleración angular del yo–yo en su caída, i.e.,

$$\dot{\alpha} = \frac{2\, g}{3\, R}.$$

Ejercicio: *Una esfera maciza que rueda por un semicilindro: ángulo de despegue:* Consideremos una esfera de masa m y radio r que rueda sin resbalar sobre un semicilindro fijo de radio R como se muestra en la figura. Si la esfera parte desde el reposo desde el punto más alto del cilindro calcule el ángulo de despegue.

Ejercicio: *Oscilaciones de un cilíndro en el interior de un bol:*

de un cilíndro macizo de masa m, y radio r que rueda sin resbalar por una concavidad cilíndrica de radio $R > r$:

Ejercicio: Movimiento de una escalera que cae. Considere una escalera homogénea de masa M y largo ‘ que est?a apoyada en el suelo y en el piso tal como se indica en la figura. Suponga que inicialmente la escalera está en reposo y forma un ángulo $\theta_0$con el suelo y que no hay roce entre la escalera y la pared ó entre la escalera y el piso. Encuentre la ecuacióon de movimiento de la escalera, y e

Apéndice: El producto Cruz ó producto Externo entre dos vectores

Dados dos vectores, $\vec{a}$ y $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^3$, el *producto exterior* ó *producto cruz* entre ellos e un nuevo vector, digamos $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}, \tag{88}$$

que satisface las siguientes propiedades:

i)

$$(\alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}) \times \vec{c} = \alpha\,\vec{a} \times \vec{c} + \beta\,\vec{b} \times \vec{c},$$

(para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

ii)

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},$$

y, en particular,

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0;$$

y

iii) si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares antre sí, $\vec{a} \times \vec{b}$ es perpendicular a ambos, su magnitud es el producto de las magnitudes de ambos y su dirección está dada por la regla de la mano derecha que se ilustra en la figura.

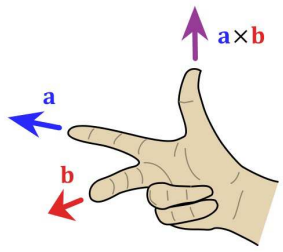


FIGURA 8. Regla de la mano derecha; por Oleg Alexandrov; CC-BY-SA-3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)], via Wikimedia Commons.

De estas tres propiedades sigue de inmediato que si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo α, la magnitud de $\vec{a} \times \vec{b}$ está dada por

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \alpha. \tag{89}$$

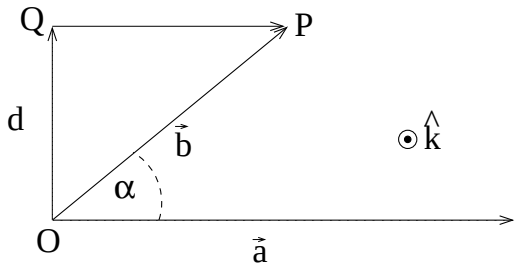


FIGURA 9. Ilustración de la demostración de (89)

En efecto, siguiendo la figura adjunta, descomponemos el vector $\vec{b} = \vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$, en que $\vec{OQ}$ es perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{QP}$ es paralelo a $\vec{a}$. Usando luego la distributividad (que sigue de las propiedades i) y ii) anteriores) obtenemos

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{OQ} + \vec{a} \times \vec{QP}.$$

Pero, $\vec{a}$ es paralelo a $\vec{QP}$, por lo tanto $\vec{a} \times \vec{QP} = 0$. Por otra parte, $\vec{OQ}$ es perpendicular a $\vec{a}$, y usando iii) tenemos que

$$\|\vec{a} \times \vec{OQ}\| = \|\vec{a}\| \, d,$$

y la dirección de $\vec{a} \times OQ$ es a lo largo de $\hat{k}$ en la figura. Finalmente, como el triángulo OQP es rectángulo, tenemos que $d = \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \alpha$. Recopilando todo lo anterior tenemos que

$$\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \operatorname{sen} \alpha \, \hat{k}.$$

8. Problemas

[1] Un cilindro con densidad constante, masa m y radio a, puede girar libremente con respecto a un eje que pasa por su centro. Tiene un hilo de alambre sujeto a un eje de radio $b < a$ que también pasa por su centro (ver figura). El hilo está sujeto a un bloque de masa M que desliza por un plano inclinado con aceleración a. ¿ Cuál es el coeficiente de roce dinámico entre el bloque y el plano inclinado?

[2]

Notas Históricas:

El momento de inercia con respecto a un eje fue introducido por Christiaan Huyghens en su libro *Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ad horologia aptato demosnstrationes geometricae*, editado en París en 1673. En la obra mencionada, Huyghens encontró el período de oscilación de un péndulo físico, en términos del momento de inercia con respecto al punto de suspensión y la distancia desde dicho punto al centro de masa del péndulo (ver, e.g., [**?**], pp. 181.) El movimiento del sólido rígido fue considerado en forma sistemática por primera vez por L. Euler (1706-1783) en *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*. En este trabajo introduce por primera vez la definición de Centro de Masa, introduce los **momentos de inercia** con ese nombre, estudia el movimiento del sólido con respecto a un eje fijo y también el movimiento libre de un sólido, introduciendo lo que hoy bse conocen como **ecuaciones de Euler** que expresan la dinámica de rotación referida al sistema del cuerpo.

9. Problemas

91. Sobre una mesa lisa (sin roce) se encuentra una varilla de masa despreciable y largo ℓ. En los extremos de la varilla se ubican dos masas $m_1 = m$ y $m_2 = 2m$. Inicialmente la

varilla se encuentra en reposo, y se hace incidir sobre ella una masa $m_3 = m$ con velocidad inicial $\vec{v}$ como lo indica en la figura, de modo que m_3 choca con m_1 elásticamente. Calcule:
a) La velocidad de m_1 después del choque.
b) La velocidad del centro de masa del sistema varilla–m_1–m_2 después del choque.
c) La velocidad angular de la varilla, después del choque.

92. *Prohibido resbalar.* Una esfera que parte del reposo rueda por un plano inclinado cuyo ángulo es de 30^o. ¿Cuál es el mínimo valor del coeficiente estático de rozamiento para que la esfera no resbale?

93. *El descenso de un yo–yo.* Imagine un yo–yo cuyo radio exterior R es diez veces el radio de su eje r. El momento de inercia I_c del yo–yo respecto de su eje se aproxima a $I_c = \frac{1}{2}MR^2$, donde M es la masa total del yo–yo. El extremo superior de la cuerda se mantiene quieto.
a) Calcule la aceleración del centro de masa del yo–yo y compárela con g.
b) Calcule la tensión de la cueda a medida que el yo–yo desciende y compárela con Mg.

94. *Carrera entre el cilindro y el tubo.* Un cilindro macizo y un tubo de paredes delgadas parten simultáneamnte del reposo de la parte superior de un plano inclinado de ángulo θ. Los dos objetos ruedan sin resbalar.
a) Calcule la aceleración del centro de masa del cilindro macizo.
b) Busque la aceleración del centro de masa del tubo.
c) ¿Qué distancia ha avanzado el tubo cuando el cilindro ha recorrido una distancia s_c?

95. *Rizando el rizo.* Una esfera de masa m y radio r rueda por un plano inclinado y adquiere la suficiente velocidad para recorrer un lazo de radio R, como se muestra en la figura. La esfera rueda sin resbalar a lo largo de todo su recorrido.

a) Halle la altura mínima h a la cual se encuentra el punto de partida, medida desde la parte superior del lazo. Tenga cuidado con la inclusión de la energía cinética rotacional de la esfera.

b) Demuestre que para $r > \frac{7}{27}R$ la altura mínima es negativa. Explique por qué este resultado puede ser correcto.

96. *Una manera difícil de sostener un cilindro.* Considere el sistema que aparece en la figura. Sobre un plano inclinado de 30^o se encuentra un cilindro de masa M y radio R, alrededor del cual se ha enrollado una cuerda paralela al plano intermedio que pasa por una polea de masa despreciable y se une con un cuerpo de masa m. La tensión de la cuerda y la fuerza de rozamiento cinético ejercida por el plano sobre el cilindro son suficientes para que éste permanezca en su sitio a medida que gira, mientras la cuerda se desenrolla y el cuerpo de masa m desciende con aceleración a. El coeficiente de roce dinmico μ_d entre el plano inclinado y el cilindro es $\mu_d = 0{,}25$. Calcule la aceleración a con que desciende el bloque de masa m y la relación M/m.

97. Calcule la aceleración hacia arriba a del centro O del disco macizo circular de masa m y radio R cuando se deja en libertad accionado por la pesa de masa M.

98. El disco circular de radio r y masa m abandona su reposo en la posición más alta, y rueda sin deslizar a lo largo de la guía circular de radio R. Determinar la fuerza normal N entre el disco y la guía en función de θ.

99. El disco semicircular de radio r parte del reposo en la posición indicada. Si no existe deslizamiento entre el disco y la superficie horizontal, determine la velocidad angular ω alcanzada por el disco cuando su energía cinética sea máxima.

100. La barra larga y delgada de la figura puede girar, sin roce, alrededor del eje horizontal A, muy cercano a su extremo.
a)Calcule la fuerza $\vec{F}$, sobre el eje A, en el instante en que se corta el hilo que sostiene el extremo opuesto a A.
b) Calcule la fuerza $\vec{F}$ sobre el eje, en el instante que la barra se encuentra paralela a la vertical.

101. Un cilindro de radio R gira con velocidad angular w alrededor de su eje, que se encuentra paralelo a la horizontal. El cilindro se deja caer suavemente sobre una superficie horizontal rugosa. Encuentre la velocidad de traslación del centro de masa, una vez que el cilindro esté rodando sin resbalar. Calcule la perdida de energía del cilindro. Calcule el tiempo que tarda el cilindro en dejar de resbalar.

102. Una escalera de largo ℓ y masa m se encuentra apoyada en una pared de modo que forma un ángulo de 60° con la horizontal. Si se deja evolucionar la escalera a partir de esa posición y si no hay roce entre la escalera y la pared y entre la escalera y el suelo, calcule el ángulo que forma la escalera con la horizontal cuando ésta se despega de la pared.

103. Considere un disco de radio R, masa m y momento de inercia I. Suponga que el disco tiene una garganta de radio a como se indica en la figura. Suponga que entre el disco y la superficie horizontal existe roce de coeficiente μ. Si se aplica una fuerza horizontal constante F, mediante una cuerda enrollada en la garganta como se indica en la figura, calcule la aceleración ángular del disco. ¿ En qué sentido gira el disco?

104. *Un anillo oscilante.* a) Un anillo de masa M y radio R se cuelga del filo de una navaja, de tal manera que el anillo puede oscilar en su propio plano, como péndulo físico. Calcule el período T_1 de las oscilaciones pequeñas en torno a la vertical. b) Suponga que un anillo idéntico se encuentra articulado a un eje PP' contenido en el plano del anillo y tangente a la circunferencia. Este disco puede realizar oscilaciones hacia dentro y hacia afuera del plano. Calcule el período T_2 de estas pequeñas oscilaciones. c) ¿ Cuál de las oscilaciones tendrá mayor período? ¿ Cuánto mayor?

105. Tres tambores del mismo radio y masa están arrumbados como se indica en la figura. Encuentre el coeficiente de roce estático mínimo entre los tambores y el suelo para que el sistema no se derrumbe.

106. Una bala de masa m y velocidad v pasa a través de una masa M colgada de una cuerda de largo ℓ y emerge con velocidad $v/2$. ¿ Cuál debe ser el valor de v para que la masa M describa un cír culo completo?

107. Una masa m realiza un movimiento circular de radio R, sobre una mesa sin fricción. Una fuerza F actúa sobre la masa por medio de un hilo que pasa por una perforación de la mesa ubicada en el centro del círculo, como se muestra en la figura. Si ω es la velocidad angular inicial ¿ Cuál es el trabajo que debe realizar la fuerza para disminuir el radio del circulo a la mitad?

108. ¿ A qué altura hay que dar un golpe a una bola de billar para que ruede sin resbalar?

109. Un lápiz de longitud ℓ y masa m se encuentra sobre una mesa horizontal sin roce. El lápiz recibe un impulso en un extremo en una dirección perpendicular al lápiz. ¿ Cuál es la orientación y la posición del lápiz en un instante t después del impulso?

110. Una bola se arroja sobre una mesa, con una velocidad v_0 de tal manera que resbala sin rodar. Demuestre que comenzará a rodar sin resbalar cuando la velocidad de traslación sea $5v_0/7$.

Referencias

[1] René Dugas, **Histoire de la Mécanique**, Editions Jacques Gabay, Paris, 1996. (Reimpresión autorizada de la edición original publicada por las Editions du Griffon, en Neuchatel en 1950).

[2] Paul M. Fishbane, Stephen Gasiorowicz, Stephen T. Thornton, **Física para ciencias e ingeniería**, Volumen I, Prentice Hall Hispanoamericana, S.A., México, DF., 1994 (traducción del original en inglés, "Physics for Scientists and Engineers, volume I", Prentice Hall, Inc., 1993.

©Rafael Benguria, Abril de 2015