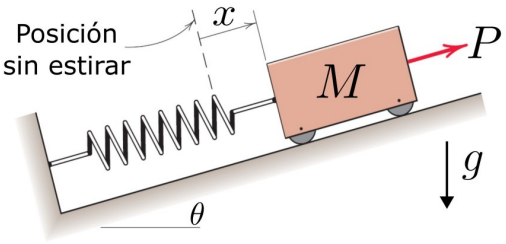
1. El carrito de masa M de la figura se encuentra ubicado sobre un plano inclinado con ángulo de elevación θ y atado a un resorte de constante k. Considere que el resorte no está deformado en la posición $x = 0$. Bajo la acción de una fuerza constante P que apunta paralela al plano, y partiendo desde el reposo, el carrito se mueve desde la posición inicial x_i hasta la posición final x_f.



   (a) Determine el trabajo realizado sobre el carrito por el resorte.

   (b) Determine el trabajo realizado sobre el carrito por su peso.

   (c) Asumiendo que x_f es el máximo valor que toma x, determine P en términos de x_i, x_f, M, g, θ y k.

a) Usando el que para una fuerza conservativa $W = -\Delta U$ tenemos que

$$W_R = -(U_f^R - U_i^R) = -(\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2) = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)$$

b) El peso es una fuerza conservativa. Luego si h_i y h_f denotan las alturas iniciales y finales del carrito, entonces

$$W_G = -(U_f^G - U_i^G) = -(mgh_f - mgh_i).$$

Por trigonometría: $h_i = x_i \sin(\theta)$ y $h_f = x_f \sin(\theta)$. Luego

$$W_G = -(U_f^G - U_i^G) = mg\sin(\theta)(x_i - x_f).$$

c) Usando el teorema de energía y trabajo, tenemos que $\Delta K = W_T$, donde W_T denota el trabajo total. El carrito parte del reposo ($K_i = 0$) y termina en reposo (x llega a su valor máximo x_f, $K_f = 0$). Luego $\Delta K = 0$. Concluimos entonces que:

$$W_T = W_R + W_G + W_P = 0, \tag{1}$$

en donde W_P denota el trabajo hecho por la fuerza P. Como esta fuerza es contante, este trabajo esta dado por $W_P = P(x_f - x_i)$. Con esto,

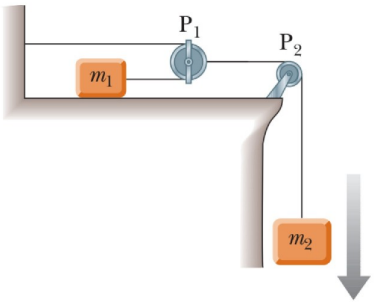
$$W_R + W_G + W_P = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2) + mg\sin(\theta)(x_i - x_f) + P(x_f - x_i) = 0. \tag{2}$$

Despejando P obtenemos finalmente

$$P = mg\sin(\theta) + \frac{1}{2}k(x_i + x_f). \tag{3}$$

■

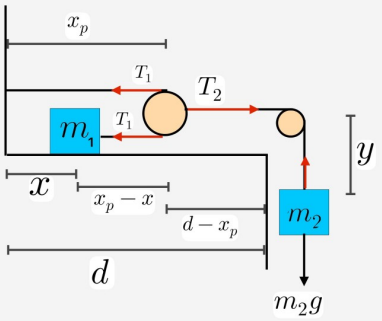
2. Un objeto de masa m_1 sobre una mesa horizontal sin fricción se conecta a un objeto de masa m_2 por medio de una polea muy ligera P_1 y una polea fija ligera P_2, como se muestra en la figura.



   a) si $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ son las aceleraciones de m_1 y m_2, respectivamente, determine la ecuación de ligadura del sistema y la relación entre las aceleraciones que se deriva de ella.

   b) Determine las aceleraciones $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ en términos de g y de las masas m_1 y m_2.

a) Ecuación de Ligadura



Llamemos ℓ_1 al largo de la cueda que une m_1 con la pared y que pasa por la polea 1

$$(x_p - x) + x_p = \ell_1 \qquad \Rightarrow \qquad 2x_p - x = \ell_1 \tag{4}$$

y ℓ_2 el largo de la cuerda que une m_2 con la polea 1

$$(d - x_p) + y = \ell_2 \tag{5}$$

lo único que varia es x e y, por lo tanto, podemos despejar x_p de ecuación (4) y reemplazar en (5) para tener una sola ecuación de ligadura que contenga ambas variables. Despejamos x_p

$$x_p = \frac{\ell_1 + x}{2}$$

Reemplazamos en (5)

$$\left(d - \frac{\ell_1 + x}{2}\right) + y = \ell_2$$

derivamos dos veces respecto al tiempo, y se obtiene la relación

$$-\frac{\ddot{x}}{2} + \ddot{y} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = 2\ddot{y}$$

Por lo tanto, la ecuación de ligadura y la relación entre las aceleraciones $\ddot{x}$ y $\ddot{y}$ son

$$\boxed{\left(d - \frac{\ell_1 + x}{2}\right) + y = \ell_2 \qquad \& \qquad \ddot{x} = 2\ddot{y}}$$

■

b) Aceleraciones

Usando la segunda ley de Newton, tenemos

$$\forall\, m_1: \qquad T_1 = m_1\ddot{x} \tag{6}$$

$$\forall\, m_2: \qquad m_2 g - T_2 = m_2\ddot{y} \tag{7}$$

La relación entre las tensiones es $2T_1 = T_2$, así que a la ecuación (6) la multiplicamos por dos, reemplazamos $\ddot{x} = 2\ddot{y}$, con esto obtenemos T_2 y usamos (7) para encontrar el valor de $\ddot{y}$. De (6)

$$T_2 = 2T_1 = 2m_1\ddot{x} = 2m_1 \cdot 2\ddot{y} = 4m_1\ddot{y} \qquad \Rightarrow \qquad T_2 = 4m_1\ddot{y}$$

Reemplzamos en (7)

$$\begin{aligned} m_2 g - T_2 &= m_2\ddot{y} \\ m_2 g - 4m_1\ddot{y} &= m_2\ddot{y} \\ m_2 g &= m_2\ddot{y} + 4m_1 = (4m_1 + m_2)\ddot{y} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la aceleración $\ddot{y}$ es

$$\ddot{y} = \frac{m_2\ g}{4m_1 + m_2}$$

y como $\ddot{x} = 2\ddot{y}$, entonces

$$\ddot{x} = 2\ddot{y} = 2 \cdot \frac{m_2\ g}{4m_1 + m_2} = \frac{2m_2\ g}{4m_1 + m_2}$$

Finalmnete, las aceleraciones son

$$\boxed{\ddot{x} = \frac{2m_2\ g}{4m_1 + m_2} \qquad \& \qquad \ddot{y} = \frac{m_2\ g}{4m_1 + m_2}}$$

■