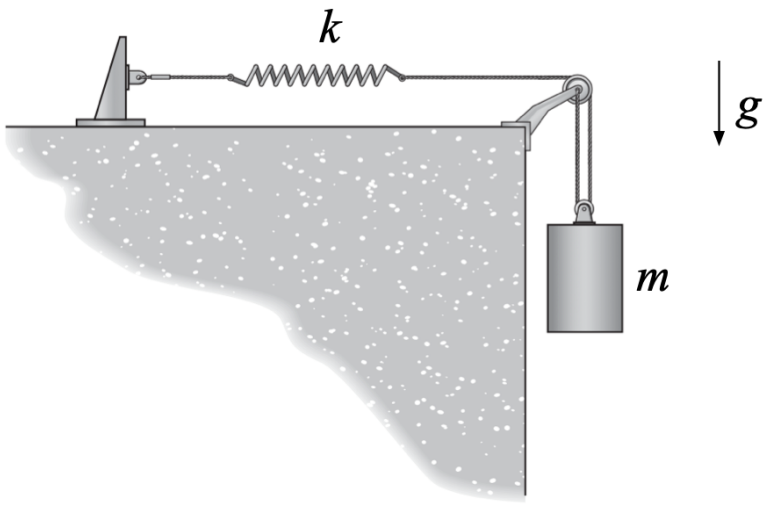
Examen

Fecha: 02 de julio 2026

1. Un cilindro de masa m cuelga verticalmente unido mediante una cuerda ideal a un resorte de constante elástica k y largo natural l_0. La cuerda pasa por una polea ideal y se enrolla pasando por otra polea ideal que sostiene al cilindro para terminar unida al eje de la polea fija tal como muestra la figura. Cuando el cilindro se suelta del reposo, el resorte está inicialmente sometido a una tensión T conocida.



a) Determine el estiramiento inicial Δx_0 del resorte **(1.0 pts.)**.

b) Determine la rapidez del cilindro cuando ha caído una altura H **(3.0 pts.)**.

c) Encuentre la altura a la que ha bajado el cilindro cuando se detiene momentáneamente por primera vez **(2.0 pts.)**.

a) Al soltar el cilindro, el resorte está estirado una longitud Δx_0 dada por

$$T = k\Delta x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta x_0 = \frac{T}{k} \qquad \text{(1.0 ptos.)}$$

b) Relación entre los desplazamientos horizontal (estiramiento) del resorte y vertical del cilindro

$$\Delta x + 2\Delta y = 0 \qquad \text{(0.5) ptos.}$$

donde x es positivo hacia la derecha e y es positivo hacia arriba.
Por conservación de energía, cuando el cilindro baja una altura H se tiene

$$\frac{1}{2}k(\Delta x_0)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(\Delta x_0 + 2H)^2 - mgH \qquad \text{(1.0 ptos.)}$$

donde se ha tomado el punto cero para la energía potencial gravitacional en el instante inicial.
Reemplazando $\Delta x_0 = T/k$ y desarrollando se obtiene

$$\frac{T^2}{2k} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{k}{2}\left(\frac{T}{k} + 2H\right)^2 - mgH \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

$$\frac{T^2}{km} = v^2 + \frac{k}{m}\left(\frac{T^2}{k^2} + \frac{4TH}{k} + 4H^2\right) - 2gH \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

Despejando, la velocidad v se tiene

$$v = \sqrt{2gH - \frac{4TH}{m} - \frac{4kH^2}{m}} \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

■

c) En este caso $v = 0$, entonces por conservación de energía se tiene

$$\frac{T^2}{km} = \frac{k}{m}\left(\frac{T^2}{k^2} + \frac{4Ty}{k} + 4y^2\right) - 2gy \qquad \text{(1.0 ptos.)}$$

entonces

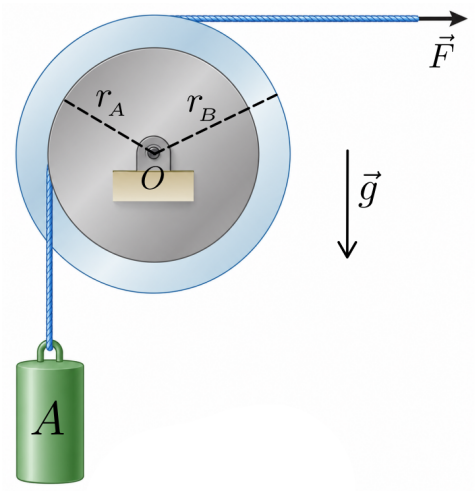
$$2gy - \frac{4Ty}{m} - \frac{4ky^2}{m} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2g - \frac{4T}{m} - \frac{4ky}{m} = 0 \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

Despejando y se tiene la solución no trivial

$$y = \frac{mg}{2k} - \frac{T}{k} \qquad \text{(0.5 ptos.)}$$

■

2. Una polea escalonada (con doble radio) gira libremente alrededor de un eje fijo que pasa por su centro O. Sobre el radio interior r_A de la polea se enrolla una cuerda inextensible y sin deslizamiento, de la cual cuelga una carga A de masa m_A.
Sobre una cuerda, enrollada en el radio exterior r_B, se aplica una fuerza horizontal constante, tal como se muestra en la figura.



Considere que el momento de inercia de la polea respecto de su eje central es I, y que el sistema parte desde el reposo en $t = 0$.

(a) Determine la aceleración angular de la polea **(2.0 ptos)**.

(b) Determine la aceleración de la carga A **(1.0 ptos)**.

(c) Determine la tensión en la cuerda que sostiene a la carga A **(1.0 ptos)**.

(d) Determine la velocidad y el desplazamiento de la carga A en un instante t. **(2.0 ptos)**.

a) Aplicando la segunda ley de Newton a la masa A:

$$T - m_A g = m_A a_A. \quad \text{(0.7 ptos.)}$$

Ahora aplicamos la ecuación de torque a la polea respecto de O,

$$F r_B - T r_A = I\alpha. \quad \text{(0.7 ptos.)}$$

Como la cuerda es inextensible y no desliza sobre la polea, se tiene que:

$$a_A = r_A \alpha.$$

Resolviendo para α:

$$\boxed{\alpha = \frac{F r_B - m_A g r_A}{I + m_A r_A^2}} \quad \text{(0.6 ptos.)}$$

■

b) Usando que $a_A = r_A\alpha$, y reemplazando lo obtenido previamente, se tiene que:

$$\boxed{a_A = r_A \frac{Fr_B - m_A g r_A}{I + m_A r_A^2}} \quad \text{(1.0 ptos.)}$$

c) Despejando la tensión T de la ecuación de movimiento de la masa A y usando α y a_A:

$$\boxed{T = m_A g + m_A r_A \frac{Fr_B - m_A g r_A}{I + m_A r_A^2}} \quad \text{(1.0 ptos.)}$$

d) Como la aceleración es constante y el sistema parte desde el reposo, se tiene que:

$$v_A = v_{A0} + a_A t. \quad \text{(0.5 ptos.)}$$

Dado que $v_{A0} = 0$,

$$\boxed{v_A = a_A t} \quad \text{(0.5 ptos.)}$$

Para el desplazamiento,

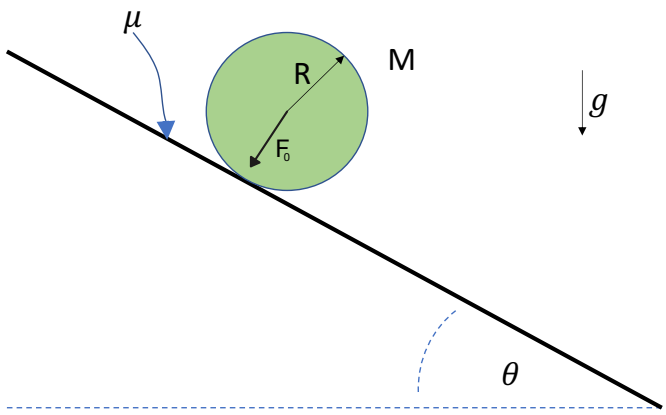
$$\Delta y_A = v_{A0} t + \frac{1}{2} a_A t^2. \quad \text{(0.5 ptos.)}$$

Como $v_{A0} = 0$,

$$\boxed{\Delta y_A = \frac{1}{2} a_A t^2} \quad \text{(0.5 ptos.)}$$

■

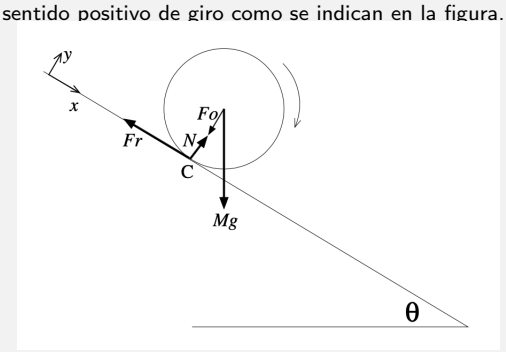
3. Un cilindro macizo de radio R y masa M puede rodar sobre un plano inclinado debido a la fuerza roce entre ambos. El coeficiente de roce estático es μ y el plano está inclinado en un ángulo θ respecto a la horizontal. Entre el cilindro y el plano existe una fuerza de atracción de magnitud F_0, la cual actúa sobre el centro del cilindro y apunta hacia el plano (perpendicular al mismo), tal como se muestra en la figura.



a) Encuentre la ecuación que satisface el ángulo máximo θ_{max}, del plano inclinado, para el cual el cilindro puede rodar sin resbalar. (**4.5 pts**)

b) Calcule la mínima fuerza que permita que θ_{max} sea igual a $\pi/2$, es decir, que el plano sea vertical. (**1.5 pts**)

Escogemos ejes x e y y el sentido positivo de giro como se indican en la figura. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son $m\vec{g}$, $\vec{N}$ y $\vec{F_r}$.



a) Primero hacemos la ecuación de torque respecto al centro instantáneo de rotación C (también se puede hacer con respecto al CM!), en el cual no aportan ni la normal ni la fuerza de roce (son desconocidas) al torque. El momento de inercia del cilindro respecto a su centro de masa es $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$, entonces el momento de inercia con respecto a C, usando el teorema de los ejes paralelos, es:

$$I_C = I_{CM} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

(**0.75 pts**)

El torque con respecto a C es entonces,

$$\tau_C = MgR\sin\theta$$

Con lo que la aceleración angular estará dada por:

$$\tau_C = I_c\alpha \rightarrow \alpha = \frac{\tau_C}{I_C} = \frac{2g\sin\theta}{3R}$$

(**0.75 pts**)

Por la condición de rodadura, la aceleración lineal estará dada por,

$$a = R\alpha = \frac{2g\sin\theta}{3}$$

(**0.75 pts**)

Ahora escribimos las ecuaciones de Newton lineales, para el eje y,

$$F_y = N - F_0 - Mg\cos\theta = 0 \rightarrow N = F_0 + Mg\cos\theta$$

(**0.5 pts**) para el eje x,

$$F_x = Mg\sin\theta - F_r = Ma = M\frac{2g\sin\theta}{3} \rightarrow F_r = \frac{Mg\sin\theta}{3}$$

(**0.5 pts**)
La condición de rueda sin resbalar se cumple si $F_r \leq \mu N$, es decir,

$$\frac{Mg\sin\theta}{3} \leq \mu(F_0 + Mg\cos\theta_{max})$$

(**0.5 pts**) Entonces, el ángulo máximo satisface la ecuación:

$$\frac{Mg\sin\theta_{max}}{3} = \mu(F_0 + Mg\cos\theta_{max})$$

Reordenando

$$\sin\theta_{max} - 3\mu\cos\theta_{max} = \frac{3\mu}{Mg}F_0$$

(**0.75 pts**)
b) Para que pueda rodar verticalmente, reemplazamos en la ecuación anterior $\theta_{max} = \pi/2$ y se obtiene:

$$F_{0,min} = \frac{Mg}{3\mu}$$

(**1.5 pts**: 0.5 despejar F_0, enteder la condición 0.5 y encontrar el valor 0.5)
VERSIÓN desde el CM:
Escogemos el eje x paralelo al plano inclinado, positivo hacia abajo, y el eje y perpendicular al plano. Las fuerzas sobre el cilindro son el peso $M\vec{g}$, la normal $\vec{N}$, la fuerza de roce estático $\vec{F}_r$ y la fuerza atractiva $\vec{F}_0$ hacia el plano. En la dirección perpendicular al plano no hay aceleración, por lo que

$$N - F_0 - Mg\cos\theta = 0,$$

de donde

$$N = F_0 + Mg\cos\theta.$$

En la dirección paralela al plano,

$$Mg\sin\theta - F_r = Ma.$$

Ahora escribimos la ecuación de torque respecto al centro de masa. El peso, la normal y la fuerza F_0 no ejercen torque respecto al centro de masa. La única fuerza que produce torque es el roce estático:

$$F_r R = I_{\mathrm{CM}}\alpha.$$

Para un cilindro macizo,

$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{2}MR^2.$$

Usando la condición de rodadura sin deslizamiento,

$$a = R\alpha,$$

se obtiene

$$F_r R = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R},$$

por lo tanto

$$F_r = \frac{1}{2}Ma.$$

Reemplazando en la ecuación traslacional:

$$Mg\sin\theta - \frac{1}{2}Ma = Ma.$$

Entonces

$$Mg\sin\theta = \frac{3}{2}Ma,$$

y

$$a = \frac{2}{3}g\sin\theta.$$

■

Por lo tanto, la fuerza de roce necesaria para rodar sin resbalar es

$$F_r = \frac{1}{2}M\left(\frac{2}{3}g\sin\theta\right),$$

es decir,

$$F_r = \frac{1}{3}Mg\sin\theta.$$

Para que el cilindro ruede sin resbalar, el roce requerido debe ser menor o igual al roce estático máximo:

$$F_r \leq \mu N.$$

Así,

$$\frac{1}{3}Mg\sin\theta \leq \mu\left(F_0 + Mg\cos\theta\right).$$

En el ángulo máximo, la condición se satura:

$$\frac{1}{3}Mg\sin\theta_{\text{máx}} = \mu\left(F_0 + Mg\cos\theta_{\text{máx}}\right).$$

Por lo tanto,

$$Mg\sin\theta_{\text{máx}} = 3\mu\left(F_0 + Mg\cos\theta_{\text{máx}}\right).$$

Reordenando,

$$\sin\theta_{\text{máx}} - 3\mu\cos\theta_{\text{máx}} = \frac{3\mu F_0}{Mg}.$$

Para que el cilindro pueda rodar sin resbalar sobre un plano vertical,

$$\theta_{\text{máx}} = \frac{\pi}{2}.$$

Entonces,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3\mu\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\mu F_0}{Mg}.$$

Como

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

se obtiene

$$1 = \frac{3\mu F_0}{Mg}.$$

Finalmente,

$$\boxed{F_{0,\text{mín}} = \frac{Mg}{3\mu}}.$$

■