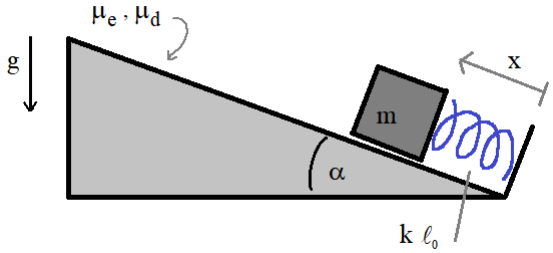
Control 2

Fecha: 11 de Octubre de 2024

1. Un bloque de masa m se encuentra sobre un plano inclinado con ángulo α, que tiene coeficientes de roce estático μ_e y dinámico μ_d. El bloque está apoyado además en un resorte de constante k y largo natural ℓ_0 (ver figura). Calcule el rango de posiciones (en función de la variable x) en que el bloque puede permanecer en reposo



El problema presenta la dificultad que el roce puede apuntar como vector en 2 direcciones dependiendo de para donde se ve empujado el bloque. Por lo mismo se puede tratar como $+F_{roce}$ y despues acotarlo con valores positivos o negativos.
a)
Si se escribe las ecuaciones de Newton, se puede hacer desde el sistema de referencia planteado o bien se puede trasladar el origen de x al punto en que el resorte no ejerce fuerza $x = \ell_0 + u$:

$$(1)\ \hat{x} : \hat{u} : \ -ku - mg\sin\alpha + F_{roce} = -k(x - \ell_0) - mg\sin\alpha + F_{roce} = m\ddot{u} = m\ddot{x}$$

(1 pto.)

$$(2)\ \hat{y} : \ N - mg\cos\alpha = m\ddot{y} = 0$$

(1 pto.)
En esta parte se supone que tratamos el problema desde la estática i.e. $\vec{a} = \vec{0}$, lo que se traduce en las ecuaciones de Newton reducidas a:

$$N = mg\cos\alpha$$

(1 pto.)

$$-ku - mg\sin\alpha + F_{roce} = 0 \Rightarrow F_{roce} = ku + mg\sin\alpha$$

(1 pto.)
En este punto podemos acotar F_{roce} tanto para su valor positivo como negativo (para dar cuenta que se puede oponer en ambas direcciones):

$$-\mu_e N \leq F_{roce} \leq \mu_e N$$

(1.0 pto.)
por lo que podemos escribir

$$-\mu_e mg\cos\alpha \leq ku + mg\sin\alpha \leq \mu_e mg\cos\alpha$$
$$u = x - \ell_0 \Rightarrow \ell_0 - \frac{mg}{k}(\mu_e\cos\alpha + \sin\alpha) \leq x \leq \ell_0 + \frac{mg}{k}(\mu_e\cos\alpha - \sin\alpha)$$

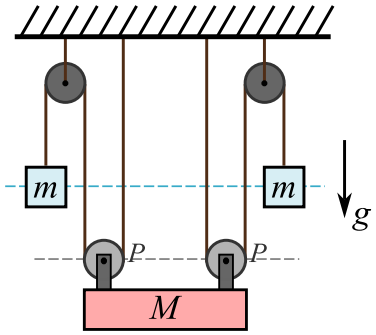
(1.0 pto.) ■

2. Se tiene el sistema de la figura compuesto por dos bloques alineados de masa m y uno de masa M. Cada bloque de masa m está sujeto por una cuerda ideal que pasa por una polea móvil sin masa P, donde ambas cuerdas tienen el mismo largo. Por otro lado, el bloque de masa M está sujeto por las dos poleas P, que también se encuentran alineadas.

   a. Encuentre la condición de ligadura entre las aceleraciones de los bloques **[2.0 ptos.]**.

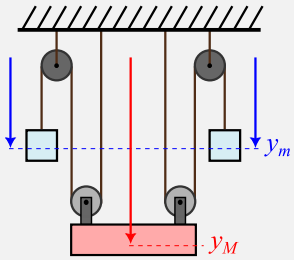
   b. Dibuje el DLC de cada bloque y escriba sus ecuaciones de movimiento **[2.0 ptos.]**.

   c. Encuentre las aceleraciones de los bloques **[2.0 ptos.]**.



Hint: El problema se simplifica si considera la simetría del sistema.

a) Al notar que el sistema es simétrico, podemos imponer que las masas m deben siempre permanecen alineadas. De esta manera, podemos definir las coordenadas



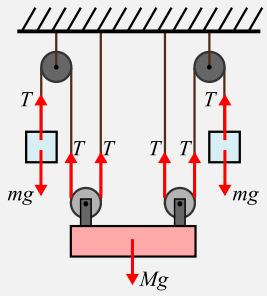
La coordenada y_m describe la posición de cada bloque m e y_M la posición del bloque M **(0.5 ptos.)**.
Para ambas cuerdas la condición de ligadura es

$$\ell = y_m + 2y_M + \text{ctes.} \qquad \textbf{(1.0 pto.)}$$

Derivando dos veces se obtiene la condición de ligadura

$$0 = \ddot{y}_m + 2\ddot{y}_M. \qquad \textbf{(0.5 ptos.)}.$$

b) Nuevamente notando la simetría del problema, el DCL toma la forma **(1.0 pto.)**:



■

Se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$mg - T = m\ddot{y}_m. \qquad \textbf{(0.5 ptos.)}$$

$$Mg - 4T = M\ddot{y}_M. \qquad \textbf{(0.5 ptos.)}$$

c) Para la eliminar T, multiplicamos por cuatro la ecuación de mov. de m y le restamos la de M. Se obtiene

$$\begin{aligned} 4(mg - T) - (Mg - 4T) =& 4m\ddot{y}_m - M\ddot{y}_M \\ g(4m - M) =& 4m\ddot{y}_m - M\ddot{y}_M \qquad \textbf{(0.5 ptos.)} \end{aligned}$$

Ahora utilizamos la condición de ligadura $\ddot{y}_m = -2\ddot{y}_M$ **(0.5 ptos.)**, remplazando

$$g(4m - M) = 4m(-2\ddot{y}_M) - M\ddot{y}_M = -(8m + M)\ddot{y}_M.$$

Se obtiene

$$\ddot{y}_M = \frac{g(M - 4m)}{(M + 8m)}, \qquad \textbf{(0.5 ptos.)}$$

y

$$\ddot{y}_M = -2\frac{g(M - 4m)}{(M + 8m)} \qquad \textbf{(0.5 ptos.)}$$

Nota: Inicialmente el estudiante puede no imponer la simetría. Sin embargo, debe llegar al mismo resultado al obtener que $\ddot{y}_m = \ddot{y}_{m,\text{izq.}} = \ddot{y}_{m,\text{der.}}$ y $T = T_{\text{izq.}} = T_{\text{der.}}$.

■