Facultad de Física, Pontificia Universidad Católica de Chile
FIS–1513: Estática y Dinámica
Profs. Rafael Benguria y Roberto Rodríguez
Interrogación 1, Miércoles 7 de Abril de 2010

Problema 1

Un niño de masa M se desliza por un resbalín a rapidez v_0 constante, como se muestra en la figura: El resbalín tiene forma de hélice, definida por las ecuaciones $r = R$, constante, y $z = (h/2\pi)\theta$. Para describir el movimiento:

i) Escriba el vector posición del niño en coordenadas cilíndricas.

ii) Determine la velocidad angular del niño alrededor del eje z.

iii) Determine la aceleración indicando su magnitud y sentido.

Solución:

i) Usando coordenadas cilíndricas, escogiendo el eje z como el eje de simetría de la hélice, el vector posición del niño está dado por

$$\vec{r} = r\hat{\rho} + z\hat{k} = R\hat{\rho} + \frac{h}{2\pi}\theta\hat{k},$$

en que hemos usado la ecuación de la hélice (i.e., $r = R$, constante, y $z = (h/2\pi)\theta$) para escribir la segunda igualdad.

ii) En cilíndricas, la velocidad del niño está dada por

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{\rho} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{k},$$

y usando la ecuación de la hélice, tenemos $r = R$, $\dot{r} = 0$ y $\dot{z} = \dot{\theta}(h/2\pi)$, obtenemos que

$$\vec{v} = \dot{\theta}(R\hat{\rho} + \frac{h}{2\pi}\hat{\theta}).$$

A partir de lo anterior, podemos encontrar el módulo de la velocidad, el cual está dado por

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = |\dot{\theta}|\sqrt{R^2 + (\frac{h}{2\pi})^2}.$$

De acuerdo al enunciado el problema $|\vec{v}| = v_0$, y en tonces, de la ecuación anterior encontramos,

$$|\dot{\theta}| = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + (\frac{h}{2\pi})^2}}.$$

iii) En general, la aceleración en cilíndricas está dada por:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\rho} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{k}$$

En el caso particular del movimiento del niño por la hélice, tenemos que $r = R$ (constante), de modo que $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$. Por otra parte, como hemos visto de la parte ii), $\dot{\theta}$ es una constante, de modo que $\ddot{\theta} = 0$. Además $\ddot{z}$ es proporcional a $\ddot{\theta}$ y por lo tanto también se anula. Reemplazando todo esto en la ecuación anterior, tenemos finalmente que

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2)\hat{\rho}$$

y, reemplazando el valor de la velocidad angular encontrado en ii) finalmente obtenemos,

$$\vec{a} = -\frac{Rv_0^2}{R^2 + (h/2\pi)^2}\hat{\rho}.$$

Problema 2 Una partícula de masa M se ubica sobre el manto de un cono que gira en torno a su eje con una rapidez angular ω constante de modo que la partícula no desliza, tal como muestra la figura. La partícula se encuentra situada a una distancia d de la cúspide del cono. El manto del cono forma un ángulo α con el eje de rotación y el coeficiente de roce estático entre la partícula y la superficie es igual a μ.

1. Haciendo uso de un sistema de coordenadas apropiado para este problema, determine la aceleración que experimenta la partícula.
2. Utilizando el resultado obtenido en el ítem anterior, determine **la rapidez angular mínima y máxima** para que la partícula se mantenga en reposo. Denomine $\omega_{\text{mín}}$ y $\omega_{\text{máx}}$ a estos valores.
3. Describa que ocurre en el caso que $\alpha = \pi/2$.

Solución: *Pregunta 1*

De la descripción del movimiento de la partícula, deducimos que ésta describe un movimiento circular uniforme sobre un plano perpendicular al eje de rotación. Usando trigonometría, verificamos que el radio de la circunferencia descrita sobre este plano es $d\sin\alpha$. De ello, escogemos un sistema de coordenadas cilíndricos, donde el eje $\hat{k}$ coindice con el eje de rotación y los ejes $\hat{\rho}$ y $\hat{\theta}$ son paralelos al plano de rotación. El origen de este sistema de coordenadas será la cúspide del cono. De ello, concluimos que $\rho(t) = d\sin\alpha$, $\dot{\theta}(t) = \omega$ y $k(t) = d\cos\alpha$. El vector posición es entonces:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \rho(t)\hat{\rho} + k(t)\hat{k} \\ &= d\sin\alpha\hat{\rho} + d\cos\alpha\hat{k}.\end{aligned}$$

Derivando una vez esta expresión obtenemos:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \vec{v} \\ &= \rho(t)\dot{\theta}(t)\hat{\theta} \\ &= \omega d\sin\alpha\hat{\theta}.\end{aligned}$$

Derivando una segunda vez, obtenemos la aceleración:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \vec{a} \\ &= -\rho(t)\dot{\theta}^2(t)\hat{\theta} \\ &= -\omega^2 d\sin\alpha\hat{\rho}.\end{aligned}$$

Pregunta 2

De la segunda ley de Newton (y del hecho que la masa se conserva en este problema) sabemos que la suma neta de fuerzas actuando sobre el cuerpo debe ser igual al producto de la masa por la aceleración que experimenta. De ello:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\text{neta}} &= M\vec{a} \\ &= -M\omega^2 d\sin\alpha\hat{\rho}.\end{aligned}$$

Para determinar la fuerza neta actuando sobre el cuerpo, construimos su diagrama de cuerpo libre (DCL). Sobre el cuerpo se encuentran actuando tres fuerzas: el peso, la normal y la fuerza de roce:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = M\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_r.$$

Descomponiento la suma de fuerzas en cada dirección de nuestro sistema de coordenadas, obtenemos:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \left(-N\cos\alpha + F_r\sin\alpha\right)\hat{\rho} + \left(-Mg + N\sin\alpha + F_r\cos\alpha\right)\hat{k},$$

donde hemos hecho la suposición que la fuerza de roce apunta en el sentido $\hat{k}$ positivo. Igualando al producto de la masa por la aceleración obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned}-N\cos\alpha + F_r\sin\alpha &= -M\omega^2 d\sin\alpha, \\ -Mg + N\sin\alpha + F_r\cos\alpha &= 0.\end{aligned}$$

Para despejar la variable F_r, multiplicamos por $\sin\alpha$ la primera ecuación y por $\cos\alpha$ la segunda, obteniendo:

$$\begin{aligned}-N\cos\alpha\sin\alpha + F_r\sin^2\alpha &= -M\omega^2 d\sin^2\alpha, \\ -Mg\cos\alpha + N\sin\alpha\cos\alpha + F_r\cos^2\alpha &= 0.\end{aligned}$$

Al sumar ambas ecuaciones obtenemos:

$$-Mg\cos\alpha + F_r\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) = -M\omega^2 d\sin^2\alpha.$$

Dado que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, obtenemos:

$$\begin{aligned}F_r &= -M\omega^2 d\sin^2\alpha + Mg\cos\alpha \\ &= M\left(-\omega^2 d\sin^2\alpha + g\cos\alpha\right).\end{aligned}$$

Observamos que el signo de la variable F_r, esto es, el sentido de la fuerza de roce, puede cambiar para ciertos valores de ω. Reemplazando en la segunda ecuación, obtenemos la variable N:

$$\begin{aligned}N\sin\alpha &= Mg - F_r\cos\alpha \\ &= Mg\left(1-\cos^2\alpha\right) + M\omega^2 d\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= Mg\sin^2\alpha + M\omega^2 d\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= M\left(g + \omega^2 d\cos\alpha\right)\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

De ello:

$$N \quad = \quad M\left(g + \omega^2 d\cos\alpha\right)\sin\alpha$$

Notamos de la expresión previa que $N \geq 0$ para cualquier valor de ω. Utilizando este hecho y el modelo de Amontons, sabemos que $|F_r| \leq \mu N$. En otras palabras, $-\mu N \leq F_r \leq \mu N$. Igualando F_r a la cota máxima y mínima nos permitirá obtener los valores máximos y mínimos de ω para que la partícula permanezca en reposo relativo a la superficie. Debido a nuestra suposición inicial que la fuerza de roce apunta en sentido $\hat{k}$ positivo, la rapidez angular mínima se encontrará dada por $\mu N = F_r$:

$$M\left(-\omega_{\text{mín}}^2 d\sin^2\alpha + g\cos\alpha\right) \quad = \quad \mu M\left(g + \omega_{\text{mín}}^2 d\cos\alpha\right)\sin\alpha.$$

Despejando:

$$\omega_{\text{mín}}^2 d\sin\alpha\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right) = g\left(\cos\alpha - \mu\sin\alpha\right),$$

y, de ello:

$$\omega_{\text{mín}}^2 \quad = \quad \frac{g}{d\sin\alpha}\left(\frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}\right).$$

Esta expresión puede ser simplificada utilizando el ángulo crítico, i.e. el ángulo tal que $\tan\phi = \mu$. Deducimos que:

$$\begin{aligned}\frac{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} &= \frac{\cos\phi\cos\alpha - \sin\phi\sin\alpha}{\cos\phi\sin\alpha + \sin\phi\cos\alpha} \\ &= \frac{\cos\left(\phi + \alpha\right)}{\sin\left(\phi + \alpha\right)},\end{aligned}$$

y:

$$\omega_{\text{mín}}^2 \quad = \quad \frac{g}{d\sin\alpha}\frac{\cos\left(\phi + \alpha\right)}{\sin\left(\phi + \alpha\right)}.$$

Verificamos que esta expresión es negativa a cuando $\phi + \alpha > \pi/2$ y, consecuentemente, $\alpha \leq \pi/2 - \phi$ para que exista una solución. En el caso crítico $\alpha + \phi = \pi/2$ se tiene $\omega_{\text{mín}} = 0$ y la partícula no puede mantenerse en su lugar. Esto se debe a que en este caso la partícula se encuentra sobre un plano inclinado con ángulo de inclinación ϕ. En otras palabras, *la partícula se encuentra precisamente con la inclinación necesaria para que no pueda mantenerse en equilibrio sobre el plano inclinado en reposo. Por eso es necesario que la superficie rote.* En consecuencia, cuando la expresión previa es negativa, la rapidez angular no se encuentra acotada inferiormente: incluso si el plano no estuviese rotando, la inclinación de la partícula es inferior al ángulo crítico y, por tanto, no desliza. La solución física al problema nos permite asegurar que, para $\alpha \geq \pi/2 - \phi$, la rapidez mínima es igual a cero.

Para calcular $\omega_{\text{máx}}$, imponemos la condición $-\mu N = F_r$, esto es:

$$-M\left(-\omega_{\text{máx}}^2 d\sin^2\alpha + g\cos\alpha\right) \quad = \quad \mu M\left(g + \omega_{\text{máx}}^2 d\cos\alpha\right)\sin\alpha.$$

Despejando obtenemos:

$$\omega_{\text{máx}}^2 d\sin\alpha\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) \quad = \quad g\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\right),$$

y de ello:

$$\omega^2_{\text{máx}} = \frac{g}{d\sin\alpha}\left(\frac{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}\right).$$

Nuevamente hacemos uso del ángulo crítico:

$$\begin{aligned}\frac{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}{\sin\alpha-\mu\cos\alpha} &= \frac{\cos\alpha\cos\phi+\sin\phi\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\phi-\sin\phi\cos\alpha}\\ &= \frac{\cos(\alpha-\phi)}{\sin(\alpha-\phi)},\end{aligned}$$

y entonces:

$$\omega^2_{\text{mín}} = \frac{g}{d\sin\alpha}\frac{\cos(\alpha-\phi)}{\sin(\alpha-\phi)}.$$

La expresión previa es negativa si $\alpha-\phi<0$. Consecuentemente, $\alpha>\phi$ para que exista solución. En el caso crítico $\alpha=\phi$, la rapidez angular máxima no se encuentra acotada. Concluimos que la solución física al problema es asegurar que para $\alpha\leq\phi$ la rapidez angular no se encuentra acotada superiormente.

Pregunta 3

En el caso $\alpha=\pi/2$, la aceleración de la partícula es simplemente:

$$\vec{a} = -M\omega^2 d\hat{\rho}.$$

Por otra parte, la fuerza neta actuando sobre el cuerpo es simplemente:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = F_r\hat{\rho}+(-Mg+N)\,\hat{k},$$

donde hemos usado la suposición que la fuerza de roce tiene sentido $\hat{\rho}$ positivo. Vemos que esto implica:

$$\begin{aligned}F_r &= -M\omega^2 d,\\ -Mg+N &= 0.\end{aligned}$$

Del modelo de Amontons obtenemos simplemente $-\mu Mg\leq F_r\leq\mu Mg$. En particular, tenemos que $F_r=\mu N$ implica:

$$-M\omega^2_{\text{mín}}d = \mu Mg.$$

De ello:

$$\omega^2_{\text{mín}} = -\mu\frac{g}{d}.$$

Es claro que la rapidez angular no se encuentra acotada inferiormente, algo que es intuitivo. Adicionalmente, utilizando el ángulo crítico obtenemos:

$$\omega^2_{\text{mín}} = -\frac{g}{d}\frac{\sin\phi}{\cos\phi}.$$

Pero $\cos(\phi + \pi/2) = -\sin\phi$ y $\sin(\phi + \pi/2) = \cos\phi$, de donde:

$$\omega^2_{\text{mín}} = \frac{g}{d}\frac{\cos(\phi + \pi/2)}{\sin(\phi + \pi/2)},$$

que es precisamente la expresión encontrada en la pregunta previa, usando $\alpha = \pi/2$. De la expresión $F_r = -\mu N$ obtenemos:

$$\omega^2_{\text{máx}} = \mu\frac{g}{d}.$$

Usando nuevamente el ángulo crítico y el hecho que $\cos(\pi/2 - \phi) = \sin\phi$ y $\sin(\pi/2 - \phi) = \cos\phi$ deducimos:

$$\omega^2_{\text{máx}} = \frac{g}{d}\frac{\cos(\pi/2 - \phi)}{\sin(\pi/2 - \phi)},$$

que es precisamente la expresión encontrada en la pregunta previa. De ello, la rapidez angular se encuentra acotada superiormente. Este es también un resultado intuitivo.

Problema 3

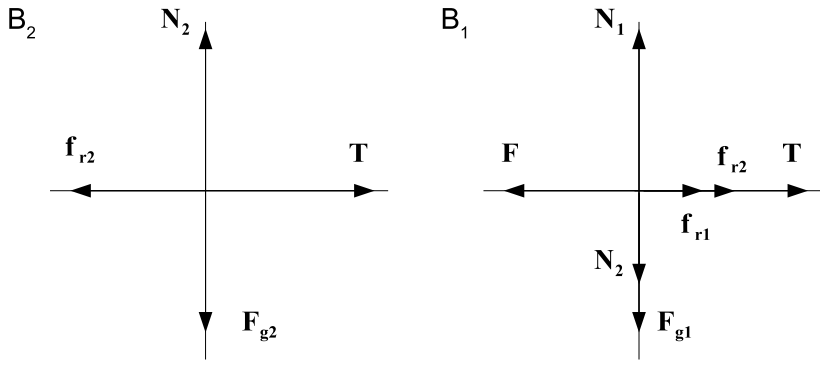
El bloque B_1 de masa m_1 está apoyado sobre una superficie horizontal fija y el bloque B_2 de masa m_2 está apoyado sobre B_1. Los bloques están unidos a los extremos de una cuerda ideal, que pasa por una polea fija ideal tal como se muestra en la figura. Los coeficientes de roce estático y dinámico entre B_1 y B_2, y entre B_1 y la superficie horizontal tienen el mismo valor μ_s y μ_k respectivamente, con $\mu_s > \mu_k$. Todos los demás roces son despreciables. Adicionalmente, sobre B_1 se ejerce una fuerza horizontal de magnitud F en el sentido que se muestra en la figura.

1. Construya los diagramas de cuerpo libre para B_1 y B_2.
2. Determine la magnitud máxima $F_{\text{máx}}$ de la fuerza aplicada a partir de la cuál el sistema deja de estar en equilibrio.
3. Si la magnitud F de la fuerza aplicada sobre B_1 es mayor que la fuerza máxima calculada en el inciso anterior, determine la aceleración de ambos bloques en función de F.

Solución:

Pregunta 1

Diagrama del cuerpo libre:



Pregunta 2

De la segunda ley de Newton, con $f_{r1} = \mu_s N_1$ y $f_{r2} = \mu_s N_2$, donde $N_2 = m_2 g$ y $N_1 = m_1 g + m_2 g$. Entonces, para:

Cuerpo B_1:

$$T - \mu_s m_2 g = 0$$

Cuerpo B_2:

$$F_{max} - T - 2\mu_s m_2 g - \mu_s m_1 g = 0$$

Eliminando T de las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$F_{max} = 3\mu_s g(3m_2 + m_1)$$

Pregunta 3

De manera similar a la pregunta anterior pero con $f_{r1} = \mu_k N_1$ y $f_{r2} = \mu_k N_2$, las ecuaciones de Newton quedan:

Cuerpo B_1:

$$T - \mu_k m_2 g = m_2 a$$

Cuerpo B_2:

$$F_{max} - T - 2\mu_k m_2 g - \mu_k m_1 g = m_1 a$$

Eliminando T de las ecuaciones anteriores obtenemos la aceleración del sistema en función de la fuerza F:

$$a = \frac{1}{(m_1 + m_2)} \left[F - 3\mu_k m_2 g - \mu_k m_1 g\right]$$