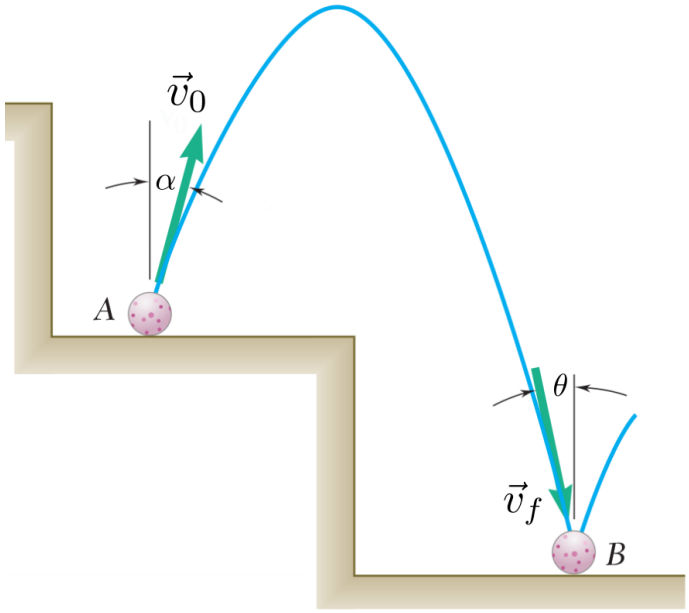
Interrogación 1

Fecha: 17 de Abril 2026

1. Una pelota se lanza con velocidad $\vec{v}_0$ en un ángulo α con respecto a la vertical, desde un escalón en el punto A, tal como se muestra en la figura.



a) Determine el valor de v_0 si se sabe que la pelota llega al punto B con rapidez v_f en un ángulo θ con la vertical (3 puntos).

b) Determine el tiempo de vuelo de la pelota (3 puntos).

a) Como los ángulos están medidos respecto de la vertical, las componentes de la velocidad inicial son:

$$v_{0x} = v_0 \sin\alpha, \quad \text{(0.5 ptos.)} \qquad v_{0y} = v_0 \cos\alpha. \quad \text{(0.5 ptos.)}$$

Al llegar a B, la pelota desciende, por lo que las componentes de la velocidad final son:

$$v_{fx} = v_f \sin\theta, \quad \text{(0.5 ptos.)} \qquad v_{fy} = -v_f \cos\theta. \quad \text{(0.5 ptos.)}$$

En el movimiento parabólico, la componente horizontal de la velocidad permanece constante. Por tanto,

$$v_{0x} = v_{fx}. \quad \text{(0.2 ptos.)}$$

Entonces,

$$v_0 \sin\alpha = v_f \sin\theta. \quad \text{(0.3 ptos.)}$$

Despejando v_0,

$$\boxed{v_0 = \frac{v_f \sin\theta}{\sin\alpha}}. \quad \text{(0.5 ptos.)}$$

■

b) En la dirección vertical se cumple que:

$$v_{fy} = v_{0y} - gt. \quad \text{(0.5 ptos.)}$$

Sustituyendo las componentes verticales para el tiempo de vuelo t_v:

$$-v_f \cos\theta = v_0 \cos\alpha - gt_v. \quad \text{(1.0 ptos.)}$$

Despejando t_v,

$$\boxed{t_v = \frac{v_0 \cos\alpha + v_f \cos\theta}{g}}. \quad \text{(0.75 ptos.)}$$

Ahora reemplazamos el valor de v_0:

$$t_v = \frac{\left(\frac{v_f \sin\theta}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha + v_f \cos\theta}{g}. \quad \text{(0.75 ptos.)}$$

Y reordenando, obtenemos finalmente

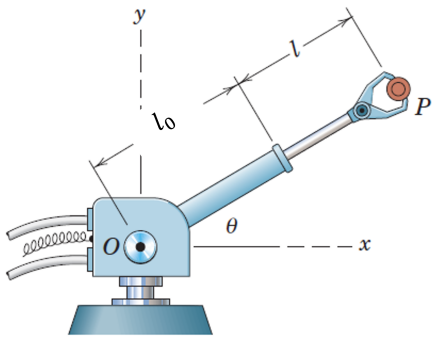
$$\boxed{t_v = \frac{v_f \sin(\alpha+\theta)}{g \sin\alpha}}.$$

■

2. Un brazo robótico gira en el plano xy y se extiende simultáneamente. La distancia fija desde el origen O hasta la articulación es l_0, y la longitud extensible del brazo está dada por $l(\theta) = a\sin(\theta)$, donde a es una constante positiva conocida. El punto P corresponde al extremo del brazo, como se muestra en la figura. Considere que la rapidez angular $\dot{\theta} = \omega$ es constante.

   a) (3 ptos) Obtenga las expresiones para la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ del punto P en coordenadas polares, en función de θ, a, ω, l_0.

   b) (3 ptos) Si $\theta = 30°$, $\omega = 2$ rad/s, $l_0 = 1$ m y $a = 2$ m, calcule la velocidad y aceleración en el sistema de coordenadas cartesianas indicado en la figura. Indicación: $\sin 30° = 1/2$ y $\cos 30° = \sqrt{3}/2$



a) En coordenadas polares, la posición del punto P está dada por $r(\theta)$:

$$r(\theta) = l_0 + a\sin\theta$$

Derivando para obtener $\dot{r}$ y $\ddot{r}$:

$$\dot{r} = a\cos\theta\cdot\dot{\theta} = a\omega\cos\theta$$
$$\ddot{r} = -a\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2 + a\cos\theta\cdot\ddot{\theta} = -a\omega^2\sin\theta$$

La **velocidad** en coordenadas polares es:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$
$$\boxed{\vec{v} = a\omega\cos\theta\,\hat{r} + (l_0 + a\sin\theta)\omega\,\hat{\theta}}$$

La **aceleración** en coordenadas polares es:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta}$$

Sustituyendo $\ddot{\theta} = 0$:

$$\vec{a} = \left(-a\omega^2\sin\theta - (l_0 + a\sin\theta)\omega^2\right)\hat{r} + \left(2a\omega^2\cos\theta\right)\hat{\theta}$$
$$\boxed{\vec{a} = -\omega^2(l_0 + 2a\sin\theta)\,\hat{r} + 2a\omega^2\cos\theta\,\hat{\theta}}$$

- (0.5 ptos) Identificar correctamente $r(\theta) = l_0 + a\sin\theta$.
  - (0.5 ptos) Derivar $\dot{r} = a\omega\cos\theta$ aplicando regla de la cadena.
  - (1.0 pto) Derivar $\ddot{r} = -a\omega^2\sin\theta$ (segunda derivada, y considerar $\ddot{\theta} = 0$).
  - (0.5 ptos) Expresión correcta de $\vec{v} = a\omega\cos\theta\,\hat{r} + (l_0 + a\sin\theta)\omega\,\hat{\theta}$.
  - (0.5 ptos) Expresión correcta de $\vec{a} = -\omega^2(l_0 + 2a\sin\theta)\,\hat{r} + 2a\omega^2\cos\theta\,\hat{\theta}$.

b) Calculando r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$:

$$r = 1 + 2\sin 30 = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \text{ m}$$

$$\dot{r} = 2(2)\cos 30 = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ m/s}$$

$$\ddot{r} = -2(4)\sin 30 = -8\cdot\frac{1}{2} = -4 \text{ m/s}^2$$

■

Velocidad:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} = 2\sqrt{3}\,\hat{r} + (2)(2)\,\hat{\theta}$$

$$\boxed{\vec{v} = 2\sqrt{3}\,\hat{r} + 4\,\hat{\theta} \quad (\text{m/s})}$$

Aceleración:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -4 - (2)(4) = -12 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} = 2(2\sqrt{3})(2) = 8\sqrt{3} \text{ m/s}^2$$

$$\boxed{\vec{a} = -12\,\hat{r} + 8\sqrt{3}\,\hat{\theta} \quad (\text{m/s}^2)}$$

La transformación de coordenadas polares a rectangulares es:

$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$$

Velocidad en coordenadas rectangulares:

$$\vec{v} = 2\sqrt{3}\,\hat{r} + 4\,\hat{\theta}$$

$$\vec{v} = 2\sqrt{3}\,(\cos 30^\circ\,\hat{x} + \sin 30^\circ\,\hat{y}) + 4\,(-\sin 30^\circ\,\hat{x} + \cos 30^\circ\,\hat{y})$$

$$\vec{v} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{x} + \frac{1}{2}\,\hat{y}\right) + 4\left(-\frac{1}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{y}\right)$$

$$\boxed{\vec{v} = \hat{x} + 3\sqrt{3}\,\hat{y} \quad (\text{m/s})}$$

Aceleración en coordenadas rectangulares:

$$\vec{a} = -12\,\hat{r} + 8\sqrt{3}\,\hat{\theta}$$

$$\vec{a} = -12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{x} + \frac{1}{2}\,\hat{y}\right) + 8\sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\,\hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hat{y}\right)$$

$$\boxed{\vec{a} = -10\sqrt{3}\,\hat{x} + 6\,\hat{y} \quad (\text{m/s}^2)}$$

- (0.5 ptos) Evaluar numéricamente r, $\dot{r}$, $\ddot{r}$, a_r y a_θ con los datos dados (0.1 ptos c/u).
- (1 ptos) Escribir correctamente las transformaciones $\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$ y $\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$.
- (0.75 ptos) Transformar correctamente $\vec{v}$, obteniendo $\vec{v} = \hat{x} + 3\sqrt{3}\,\hat{y}$ m/s.
- (0.75 ptos) Transformar correctamente $\vec{a}$, obteniendo $\vec{a} = -10\sqrt{3}\,\hat{x} + 6\,\hat{y}$ m/s^2.

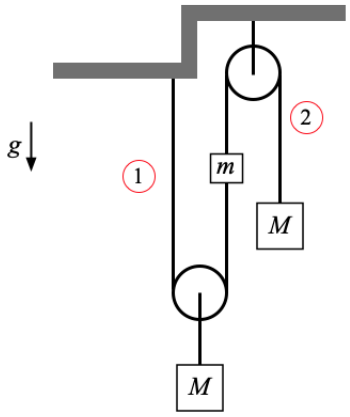
■

3. Se tiene un sistema de masas y poleas ideales como se muestra en la figura, en donde se identifican también las tensiones (desconocidas) asociadas a las cuerdas ideales "1" y "2". El sistema se deja libre, de modo que las masas se desplazan verticalmente por efecto de la gravedad. Considerando que M de la cuerda "2" baja, determinar:

   a) La aceleración del bloque de masa m. (3 pts.)

   b) Las magnitudes de las tensiones T_1 y T_2. (2 pts.)

   c) ¿Qué pasa con T_1 y T_2 si $m = 0$? Justifique. (1 pts.)

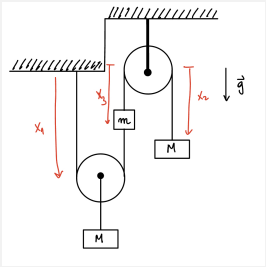


a) Primero encontramos las relaciones de ligadura. Ponemos los ejes de acuerdo a la figura:

$$L_2 = x_2 + x_3 + C_1 \rightarrow \quad \ddot{x_2} = -\ddot{x_3}$$

$$L_1 = x_1 + (x_1 - x_3) + C_2 \rightarrow \quad 2\ddot{x_1} = \ddot{x_3}$$

Con C_1 y C_2 constantes.



Esto nos lleva a que si la masa M asociada a la cuerda 2 baja, entonces la masa m sube.

$$a_2 = -a_3$$

Si la masa m sube, entonces la masa M asociada a la polea sube la mitad.

$$2a_1 = a_3$$

(1 pto por las relaciones de ligadura)
(pueden encontrarlas con este método u otro, pero que esta bien explicada la noción detrás)

Sea a la aceleración del bloque m. Entonces:

$$a_2 = -a$$

$$a_1 = a/2$$

Asumiendo que m sube, las ecuaciones para los bloques son:

■

$$-T_2 + Mg = Ma$$
$$-T_2 + T_1 + mg = -ma$$
$$-2T_1 + Mg = -M\frac{a}{2}$$

(1 pto por las ecuaciones de Newton correctas)
Despejando las tensiones y reemplazando en la segunda ecuación:

$$(Mg - Ma) - \frac{(2Mg + Ma)}{4} - mg = ma$$
$$2Mg - 5Ma - 4mg = 4ma$$
$$a = g(\frac{2M - 4m}{5M + 4m})$$

(1 pto por resolver el sistema)
b) Luego la tensión 1 es:

$$T_1 = \frac{2Mg + Ma}{4} = \frac{Mg}{2} + \frac{M}{4}g\frac{2M - 4m}{5M + 4m}$$
$$T_1 = Mg\frac{3M + m}{5M + 4m}$$

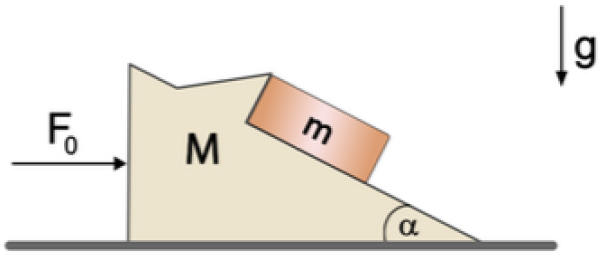
De la misma manera la tensión 2:

$$T_2 = Mg\frac{3M + 8m}{5M + 4m}$$

(1 ptos por CADA tensión)

c) Si $m = 0$ entonces $T_1 = T_2$ lo cual es de esperar.
(1 ptos por notar que las tensiones deben ser iguales con algún argumentos lógicos, o desde las ecuaciones) ■

4. Un bloque de masa m se coloca sobre una cuña de masa M que forma un ángulo α con la horizontal. Al aplicar una fuerza horizontal F_0 suficientemente grande sobre la cuña, la masa m desliza hacia arriba hasta llegar a un tope perpendicular a la superficie de la cuña, como muestra la figura.



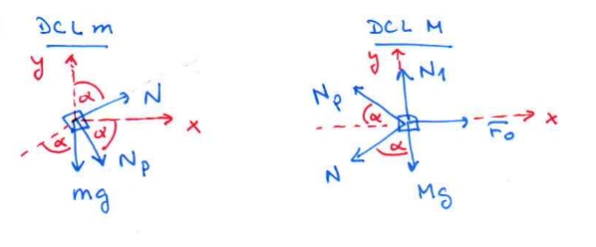
Suponiendo que no existe roce entre las superficies de contacto:

a) Dibuje los DCL para la cuña y el bloque (4 puntos).

b) Escriba las ecuaciones de movimiento para la cuña y el bloque (2 puntos).

Solución:

a) Los DCLs son:



(2 puntos por cada DCL)

b) Ecuaciones de movimiento para m :

$$x) \quad N\,\mathrm{sen}\,\alpha + N_p \cos\alpha = ma \qquad \text{(0.5 ptos.)} \qquad (1)$$

$$y) \quad N\cos\alpha - N_p\,\mathrm{sen}\,\alpha - mg = 0 \qquad \text{(0.5 ptos.)} \qquad (2)$$

Ecuaciones de movimiento para M:

$$x) \quad F_0 - N_p\cos\alpha - N\,\mathrm{sen}\,\alpha = Ma \qquad \text{(0.5 ptos.)} \qquad (3)$$

$$y) \quad N_1 + N_p\,\mathrm{sen}\,\alpha - N\cos\alpha - Mg = 0 \qquad \text{(0.5 ptos.)} \qquad (4)$$

■