Estática y Dinámica - FIS-1513

Interrogación I2

Lunes 4 de Octubre de 2010.

PROFESORES: Sebastian Reyes, Maria Cristina Depassier y Jeronimo Maze

---

Instrucciones
-Tiene 2 horas para resolver los siguientes problemas.
-Resuelva cada uno de ellos en hojas separadas. Sea claro y ordenado.
-Escriba los resultados finales de cada problema con lápiz pasta, de lo contrario perderá el derecho a recorrección.
-Todos los problemas tienen el mismo peso en la nota final.

Problema 1

Tres bloques de masa m se encuentran en reposo sobre una superficie horizontal. Los bloques 1 y 2 tienen un adhesivo de manera que cuando chocan quedan unidos. El coeficiente de roce entre las masas y la superficie es μ y la distancia inicial entre 2 y 3 es d. Se lanza el bloque 1 de modo que cuando choca con el bloque 2 tiene velocidad v_0. Calcule

a) la velocidad de 1+2 justo después de chocar. (2 ptos.)

b) la velocidad de 1+2 justo antes de chocar con 3. (2 ptos.)

c) la velocidad de 1+2 y de 3 después del choque suponiendo que este último tiene un coeficiente de restitución e. (2 ptos.)

Solución
a) Llamemos v' la velocidad después del choque. Por conservación de momentum

$$mv_0 = 2mv'$$

de donde

$$\boxed{v' = v_0/2}$$

b) Debido al roce la energía cinética disminuye de acuerdo a $E_{cf} - E_{ci} = W$. Llamando v_* la velocidad justo antes del choque, esto es

$$\frac{1}{2}(2m)v_*^2 - \frac{1}{2}(2m)v'^2 = -\mu Nd = -\mu 2mgd$$

de donde despejamos

$$\boxed{v_*^2 = v'^2 - 2\mu gd = \frac{v_0^2}{4} - 2\mu gd.}$$

c) Finalmente la partícula de masa $2m$ y velocidad v_* choca con la partícula detenida de masa m con coeficiente de restitución e. La partćula de masa $2m$ quedará con velocidad v_{2f} y la otra con v_{1f}.

De acuerdo a la definición de coeficiente de restitución, $v_{2f} - v_{1f} = -e(v_{2i} - v_{1i})$. En este caso $v_{1i} = 0, v_{2i} = v_*$. Entonces la conservación de momentum y la ecuación anterior nos dicen

$$2mv_* + m \times 0 = 2mv_{2f} + mv_{1f},$$

$$-ev_* = v_{2f} - v_{1f}.$$

Despejando se encuentra

$$\boxed{v_{1f} = \frac{2}{3}(1+e)v_*} \qquad \boxed{v_{2f} = \frac{2-e}{3}v_*}$$

Problema 2

Considere una barra no homogénea de largo L y masa M en posición vertical que puede girar en torno al punto O. La mitad inferior tiene una densidad que es igual al doble de la densidad de la parte superior. Se le da un pequeño golpe para que caiga. Calcule

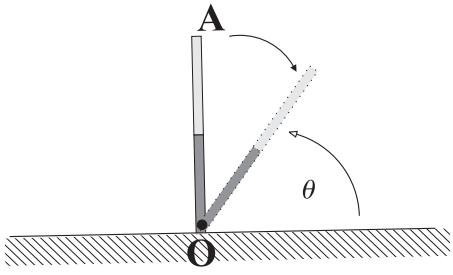
a) el momento de inercia I_0 de la barra con respecto a O. (1,5 ptos.)

b) la posición h del centro de masa. (1,5 ptos.)

c) la velocidad del extremo A cuando golpea el suelo. (1,5 ptos.)

d) la fuerza que ejerce el eje O sobre la barra, para cualquier valor del ángulo θ. (1,5 ptos.)

Ayuda: el momento de inercia respecto al CM de una barra homogénea de largo l y masa m es $I_{cm} = ml^2/12$.



Solución:

a) Llamamos ρ la densidad de la parte superior de la barra. La masa $M = 2\rho L/2 + \rho L/2 = 3\rho L/2$ por lo que $\rho = 2M/(3L)$. El momento de inercia de la barra respecto a un extremo es

$$I_0 = \int_0^L dm x^2 = \int_0^{L/2} 2\rho x^2 dx + \int_{L/2}^L \rho x^2 dx = \frac{3L^3\rho}{8}$$

que es, en términos de la masa,

$$\boxed{I_0 = \frac{ML^2}{4}}$$

También se puede calcular pensando que son dos barras y usar el teorema de Steiner para tomar el momento de inercia respecto a O. La masa de la barra con densidad 2ρ es $M_1 = 2\rho L/2$ y la parte de arriba tiene masa $M_2 = \rho L/2$

$$I_0 = \Big[\frac{M_1(L/2)^2}{12} + M_1\Big(\frac{L}{4}\Big)^2\Big] + \Big[\frac{M_2(L/2)^2}{12} + M_2\Big(\frac{3L}{4}\Big)^2\Big] = \frac{ML^2}{4}.$$

b) El centro de masa esta ubicado en

$$h = \frac{\int_0^L dm x}{M} = \frac{1}{M}\Big(\int_0^{L/2} 2\rho x dx + \int_{L/2}^L \rho x dx\Big)$$

que es,

$$\boxed{h = \frac{5L}{12}}$$

que también se puede calcular como la suma de dos barras:

$$h = \frac{1}{M}\Big(M_1\frac{L}{4} + M_2\frac{3L}{4}\Big).$$

c) Una vez que empieza a caer se conserva la energía ya que la gravedad es una fuerza conservativa y la fuerza que el soporte hace en O no realiza trabajo. Por lo tanto, tomando el cero de energía potencial en suelo tenemos

$$Mgh = \frac{1}{2}I_0\omega^2$$

donde ω es la velocidad angular cuando llega al suelo. Despejando de la ecuación anterior queda

$$\omega^2 = \frac{10g}{3L}$$

por lo que la velocidad del extremo es

$$\boxed{v_A = L\omega = \sqrt{\frac{10gL}{3}}}$$

d) Para calcular la fuerza $\vec{F}$ que el soporte ejerce sobre a barra en cualquier instante usamos $M\vec{a}_{CM} = M\vec{g} + \vec{F}$. Para esto necesitamos al aceleración del CM, que es, en coordenadas polares,

$$\vec{a}_{CM} = -h\dot{\theta}^2\hat{\rho} + h\ddot{\theta}\hat{\theta}.$$

Necesitamos calcular $\ddot{\theta}, \dot{\theta}$ Para calcularlo en cualquier posición lo más fácil es usar la conservación de energía en cualquier posición θ:

$$\frac{1}{2}I_0\dot{\theta}^2 + Mgh\sin\theta = Mgh.$$

Derivando obtenemos

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgh\cos\theta}{I_0}$$

y despejando obtenemos

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2Mgh(1-\sin\theta)}{I_0}.$$

La fuerza que hace el soporte es

$$\vec{F} = M\vec{a}_{CM} - M\vec{g} = M(-h\dot{\theta}^2\hat{\rho} + h\ddot{\theta}\hat{\theta}) + Mg\sin\theta\hat{\rho} + Mg\cos\theta\hat{\theta}$$

(Nota: el ángulo se mide desde el suelo que tomamos como eje x.) Introduciendo los valores ya calculados nos queda

$$\boxed{F_\rho = Mg\sin\theta - Mh\frac{2Mgh(1-\sin\theta)}{I_0} = \frac{Mg}{18}(43\sin\theta - 25)}$$

y

$$\boxed{F_\theta = Mg\cos\theta - Mh\frac{Mgh\cos\theta}{I_0} = \frac{11}{36}Mg\cos\theta}$$

Podemos verificar dos límites:

a) cuando $\theta = \pi/2$ la barra está vertical y resulta $F_\rho = Mg, F_\theta = 0$, lo que es el resultado esperado.

b) cuando $\theta = 0$ la barra está horizontal, y resulta $F_\rho = -25Mg/18, F_\theta = 11gM/36$. ¿Está bien esto? Sí la fuerza radial F_ρ al llegar al suelo debe ser la que acelera el CM que describe un círculo de radio h. Es decir la fuerza radial al llegar al suelo debe ser $-mv_c^2/h = -m\omega^2 h$ con ω calculado en c). Si reemplazamos vemos que coincide el resultado.

También se puede resolver el problema en coordenadas cartesianas. En este caso la aceleración del CM viene dada por,

$$\ddot{x} = -h(\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta)$$
$$\ddot{y} = -h(\dot{\theta}^2\sin\theta - \ddot{\theta}\cos\theta).$$

De manera similar al caso de coordenadas polares se puede obtener $\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath}$ con,

$$F_x = \frac{25}{36}Mg(2 - 3\sin\theta)\cos\theta$$
$$F_y = \frac{Mg}{36}(11 - 25(2 - 3\sin\theta)\sin\theta).$$

Problema 3

A un cilindro homogéneo de radio R y masa M se le enrolla una cuerda sin masa y se coloca que sobre un plano horizontal. Para ponerlo en movimiento se tira la cuerda con una fuerza constante T como se muestra en la figura. La cuerda se desenrolla sin deslizar sobre la superficie del cilindro.

Suponga primero que no existe roce entre el cilindro y el plano.

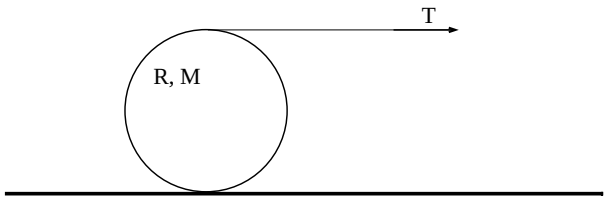
a) Calcule la aceleración del centro de masa del cilindro. (1 pto.)

b) Encuentre la aceleración angular del cilindro. (2 ptos.)

Suponga ahora que existe un coeficiente de roce estático μ entre el cilindro y el plano.

c) Si T es tal que el cilindro rueda sin resbalar sobre el plano, determine la aceleración lineal y angular del cilindro. (1,5 ptos.)

d) Calcule el coeficiente de roce mínimo de manera que el cilindro efectivamente ruede sin deslizar a lo largo del plano. (1,5 ptos.)



Solución:

a) Sin roce, la única fuerza que actúa sobre el cilindro en el sentido horizontal es la tensíon:

$$Ma = T \quad \rightarrow \quad a = T/M. \tag{1}$$

b) Calculando el torque en torno al centro del cilindro tenemos,

$$I\alpha = TR \quad \rightarrow \quad \alpha = 2T/MR \;\; (I = MR^2/2). \tag{2}$$

c) Dadas las condiciones del problema podemos plantear tres ecuaciones:

$$Ma = T + f \tag{3}$$
$$I\alpha = TR - fR \tag{4}$$
$$a = R\alpha. \tag{5}$$

Resolviendo se obtiene,

$$a = \frac{4T}{3M} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{4T}{3MR} \tag{6}$$

d) Si suponemos que rueda sin deslizar podemos obtener el valor de la fuerza de roce a partir de las ecuaciones encontradas en (c):

$$f = \frac{T}{3}. \tag{7}$$

Ahora, para que efectivamente ruede sin deslizar la fuerza de roce no puede superar $f_{max} = \mu N = \mu M g$. Por lo tanto, se debe cumplir que,

$$\mu \geq \frac{T}{3Mg}. \tag{8}$$