Interrogación 1

Fecha: 12 de mayo 2023

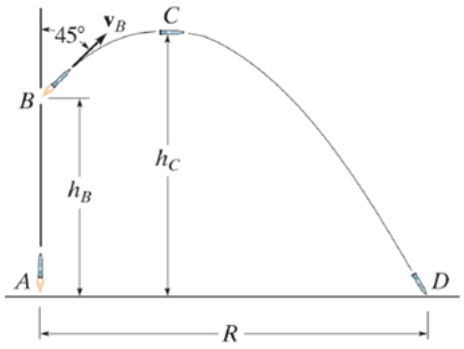
1. Considere un misil que despega desde el reposo en el punto A y sube verticalmente durante 4 segundos hasta llegar al punto B, donde se acaba su combustible. El módulo de la aceleración en el tramo AB está dado por $a_y = 6t$, donde a_y está en $\mathrm{m/s^2}$ y t en segundos. En el punto B, el misil se inclina instantáneamente (mediante un mecanismo interno) de manera tal que forma un ángulo de 45° con respecto a la horizontal y desde el punto B se mueve solo influenciado por la gravedad.

   a) Determine la velocidad del misil al llegar al punto B.(1.5 ptos)

   b) Calcule la distancia recorrida h_B por el misil desde A hasta B. (1.5 ptos)

   c) Encuentre la altura máxima h_c del misil. (1.5 ptos)

   d) Determine el alcance horizontal máximo R. (1.5 ptos)



Solución:

a) Desde A hasta B se tiene que la aceleración del misil es $a_y = 6t$, para encontrar la velocidad en el trayecto AB, debemos integrar la aceleración respecto al tiempo t:
0.5 pts

$$\int_0^{v_y} dv_y = \int_0^t 6t dt$$

$$v_y(t) = 3t^2$$

Ahora bien, evaluando para $t = 4$ s, encontramos que
0.5 pts

$$v_y(t = 4) = v_B = 48 \text{ m/s}$$

Por lo tanto la velocidad cuando el misil llega al punto B es:
0.5 pts

$$\vec{v}_B = 48\hat{y} \text{ m/s}$$

Se considera correcto también si en este inciso hicieron la descomposición vectorial considerando que el misil gira instantáneamente en el punto B un ángulo de $45°$

b) Para encontrar la distancia h_B recorrida por el misil integramos la velocidad $v_y(t)$ respecto al tiempo y evaluamos en $t = 4$ s
0.5 pts

$$\int_0^y dy = \int_0^t 3t^2 dt$$

0.5 pts

$$y(t) = t^3$$

Evaluando para $t = 4$ s, se tiene
0.5 pts

$$y(t = 4) = h_B = 64 \text{ m}$$

c) Desde el punto B en adelante, el misil está sujeto a la acelación de gravedad $\vec{g}$, luego el movimiento del misil es un movimiento parabólico. Dado que en B el misil gira instantáneamente un ángulo de $45°$, se tiene que la velocidad inicial $\vec{v}_0 B$ del movimiento parabólico es
0.25 pts

$$\vec{v}_{0B} = v_B \cos\theta \hat{x} + v_B \sin\theta \hat{y}$$

Evaluando para $v_B = 48$ m/s y $\theta = 45°$, se tiene que la velocidad del misil cuando comienza su trayectoria parabólica es
0.25 pts

$$\vec{v}_{0B} = 24\sqrt{2}\hat{x} + 24\sqrt{2}\hat{y}$$

En el punto C, la componente vertical de la velocidad es cero. Llamemos t_C el tiempo que demora el misil en llegar a ese punto, luego podemos escribir
0.25 pts

$$0 = v_B \sin\theta - g t_C$$

Evaluando la expresión anterior para $g = 10$ m/s^2, $v_{0B} = 48$ m/s y $\theta = 45°$, se tiene
0.25 pts

$$t_C = \frac{12}{5}\sqrt{2} \text{ s}$$

Ahora, evaluando t_C en la ecuación de posición vertical para el misil, se tiene:
0.25 pts

$$h_C = h_B + v_{0B} \sin\theta t_C - \frac{1}{2} g t_C^2$$

Obtenemos que la altura h_C es:
0.25 pts

$$h_C = \frac{608}{5} \text{ m} \approx 121{,}6 \text{ m}$$

d) Para encontrar el alcance máximo R, primero calculamos el tiempo t_D que demora el misil en llegar a D y luego evaluamos este tiempo en la ecuación de posición horizontal para el misil. Cuando el misil llega a D se tiene que $y_D = 0$, luego:
0.25 pts

$$0 = h_B + v_{0B} \sin\theta t_D - \frac{1}{2} g t_D^2$$

Vemos que se tiene una ecuación cuadrática para el tiempo t_D, reemplazando todos los valores conocidos del problema, se tiene:
0.25 pts

$$5t_D^2 - 24\sqrt{2}t_D - 64 = 0$$

cuya solución físicamente posible es la raíz positiva:
0.25 pts

$$t_D = \frac{4\sqrt{38} + 12\sqrt{2}}{5} \approx 8{,}32 \text{ s}$$

Ya conocido el tiempo, podemos encontrar el valor del alcance máximo R:
0.25 pts

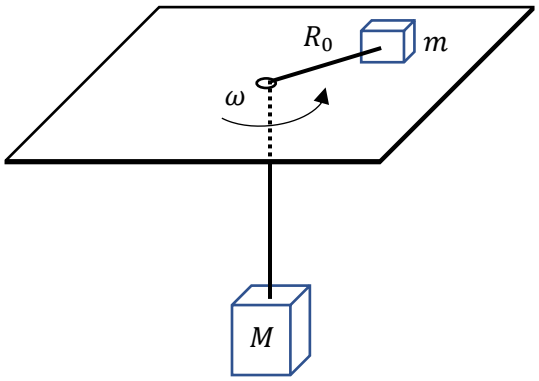
$$R = v_{0B} \cos\theta t_D$$

0.25 pts

$$R = 24\sqrt{2}\left(\frac{4\sqrt{38} + 12\sqrt{2}}{5}\right) \approx 282{,}6 \text{ m}$$

Observación: Para las respuestas numéricas, se considerará correcto si se expresan los resultados tanto en fracción/raíz como en número decimal ■

Considere dos cuerpos de masa m y M unidos por una cuerda ideal. La cuerda pasa por un pequeño agujero O. En la figura, la masa m se desplaza por una mesa horizontal sin roce girando en torno al agujero con velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega$.



a) Encuentre una expresión para la aceleración del cuerpo de masa m. (1.0 pto).

b) Realice el diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo (1.0 pto)

c) Encuentre el valor de la velocidad angular ω para que los cuerpos se encuentren en equilibrio (1.0 pto).

Suponga ahora que hay roce entre el cuerpo de masa m y la mesa.

d) Encuentre una expresión para la aceleración del cuerpo de masa m en coordenadas polares.

Note que la velocidad angular no tiene ahora por que ser constante (0.5 pto).

e) Realice el diagrama de cuerpo libre el cuerpo de masa m (1.0 pto)

f) Si el coeficiente de roce estático entre la mesa y el cuerpo de masa m es μ. Encuentre la velocidad máxima y mínima para que los cuerpos se mantengan en equilibrio. (1.5 ptos)

a)

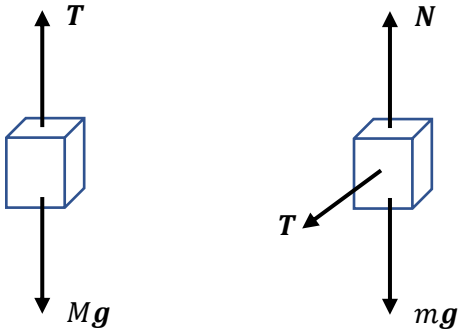
Coloquemos el sistema de coordenadas en el orificio.

$$\boldsymbol{r} = R_0\hat{\rho} \quad (0.25)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = R_0\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -R_0\left(\dot{\theta}\right)^2\hat{\rho} = -R_0\omega^2\,\hat{\rho} \quad (0.75)$$

b)



(0.5 por cada diagrama)

c)

Escribamos la Segunda Ley de Newton para cada cuerpo

Masa m

$$T = mR_0\omega^2 \quad (0.25)$$

Masa M

$$-T + Mg = 0 \quad (0.25)$$

Entonces,

$$mR_0\omega^2 = Mg$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mg}{mR_0}} \quad (0.5)$$

d)

Coloquemos el sistema de coordenadas en el orificio.

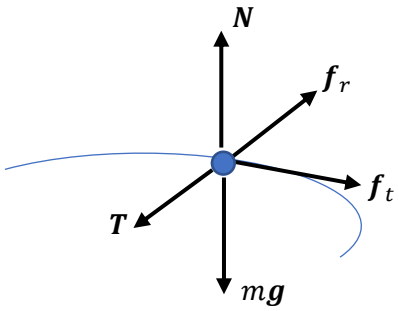
$$\boldsymbol{r} = R_0\hat{\rho}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} = R_0\dot{\theta}\,\hat{\theta}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = R_0\ddot{\theta}\,\hat{\theta} - R_0\left(\dot{\theta}\right)^2\hat{\rho} \quad (0.5)$$

Note que la aceleración tiene una componente tangencial y radial. Entonces, el diagrama de cuerpo libre quedaría como

e)



Donde, $\boldsymbol{f}_r$ es la fuerza de roce en la dirección radial y $\boldsymbol{f}_t$ en la dirección tangencial.

(-0.75 por no colocar las fuerzas de roce)

f)

Escribiendo la segunda ley de Newton

Masa m en la dirección radial

$$T - \mu mg = mR_0\omega^2 \quad (0.25)$$

Masa M

$$T = Mg \quad (0.25)$$

Notemos que la fuerza de roce puede cambiar de dirección. Entonces, la velocidad angular mínima será

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{Mg - \mu mg}{mR_0}} \quad (0.5)$$

y la velocidad angular máxima

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{Mg + \mu mg}{mR_0}} \quad (0.5)$$

(Se acepta como respuesta ω o v)

La velocidad será

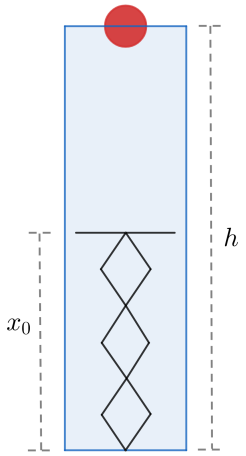
$$v = R_0\dot{\theta}$$

$$v_{min} = R_0\sqrt{\frac{Mg - \mu mg}{mR_0}}$$

$$v_{max} = R_0\sqrt{\frac{Mg + \mu mg}{mR_0}}$$

Se suelta una esfera de masa m desde el reposo en lo alto de un tubo que contiene un líquido viscoso. Se sabe que la magnitud de la fricción cinética que ejerce el fluido sobre la esfera es una función de la forma $ay + b$, con y la coordenada vertical (medida desde el fondo del tubo). El cilindro tiene una plataforma unida a un resorte de constante elástica β, tal que su longitud natural es x_0. Se sabe que en $y = h$ y en $y = h/2$, la fuerza de fricción tiene una magnitud igual a la mitad y a la cuarta parte del peso, respectivamente.

Usando los conceptos de trabajo y energía:



a) Calcule la velocidad de la esfera en el momento en que toca la plataforma.

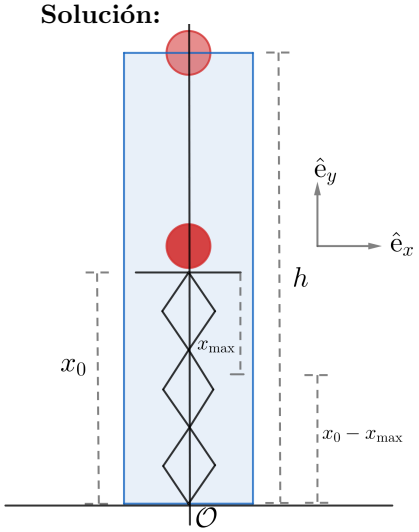
b) Muestre que la contracción máxima del resorte $x_{\max}$ viene determinada por la ecuación:

$$\frac{mg}{4h}(x_0 - x_{\max})^2 + \frac{1}{2}\beta x_{\max}^2 - mgx_{\max} + mg\left(x_0 - \frac{h}{4}\right) = 0.$$

c) Muestre que la potencia instantánea de la fuerza de fricción sobre la esfera, cuándo ésta se encuentra en contacto con la plataforma y ha recorrido una distancia igual a la mitad de la contracción máxima del resorte, tiene una magnitud dada por:

$$P = \frac{mg}{2h}\left(x_0 - \frac{x_{\max}}{2}\right)\sqrt{\frac{g}{2h}\left[h^2 - \left(x_0 - \frac{x_{\max}}{2}\right)^2\right] - 2g\left(x_0 - \frac{x_{\max}}{2} - h\right) - \frac{\beta}{4m}x_{\max}^2}.$$

Solución:



Se elegirá un sistema de coordenadas cartesiano, unidimensional, con el origen $\mathcal{O}$ en en el fondo del tubo. La dirección positiva de dicho eje estará apuntando verticalmente hacia arriba.

Primero se identificarán las constantes a y b. Para ello, utilizamos la información del problema:

$$\begin{aligned} \frac{mg}{2} &= ah + b \\ \frac{mg}{2} &= a\left(\frac{h}{2}\right) + b \end{aligned} \tag{1}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene que **[+0.2 por hallar cada constante]**

$$a = \frac{mg}{2h} \text{ y } b = 0. \tag{2}$$

Por lo tanto,

$$\vec{F}_r = \left(\frac{mg}{2h}y\right)\hat{e}_y. \tag{3}$$

Ahora se procederá con el análisis energético del sistema.

(a) Si la esfera se mueve hacia abajo, la fuerza defricción cinética se dirige hacia arriba y por lo tanto, del sistema de referencia elegido:

$$d\vec{r} = dy\,\hat{e}_y. \tag{4}$$

Así, el trabajo hecho por la fuerza de fricción será **[+0.2 por plantear el trabajo no conservativo y hallarlo]**:

$$W_r = \int_h^{x_0} \left(\frac{mg}{2h}y\right) dy = \frac{mg}{4h}\left(x_0^2 - h^2\right) \tag{5}$$

Ahora bien, la fuerza de rozamiento es no conservativa, por lo tanto, del teorema Trabajo-Energía (TE) **[+0.1 por plantear el teorema TE]**:

$$\begin{aligned} & W_{\text{no conservativo}} = \Delta\text{EC} + \Delta\text{EP} \\ \rightarrow \quad & \frac{mg}{4h}\left(x_0^2 - h^2\right) = \Delta\text{EC} + \Delta\text{EP} \end{aligned} \tag{6}$$

De las condiciones del problema **[+0.1 por hallar cada energía]**:

$$\begin{aligned} \text{EC}_i &= 0 \\ \text{EC}_f &= \frac{1}{2}mv_C^2 \\ \text{EP}_0 &= mgh \\ \text{EP}_f &= mgx_0, \end{aligned} \tag{7}$$

con v_C la velocidad de contacto con la plataforma.

Reemplazando:

$$\frac{mg}{4h}\left(x_0^2 - h^2\right) = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg(x_0 - h), \tag{8}$$

y despejando la velocidad **[+0.1 por despejar correctamente v_C]**:

$$v_C = \sqrt{2g(h - x_0) + \frac{g}{2h}\left(x_0^2 - h^2\right)}. \tag{9}$$

(b) **Nota: Hubo un error en el planteamiento original del problema, así que las respuestas que se piden están mal. Se calificará el procedimiento más que la respuesta final.**

Sea $x_{\max}$ la máxima contracción del resorte. Ésta se puede calcular con (al menos) dos métodos diferentes. Se tomará el mismo sistema coordenado del inciso (a).

- **Método 1**: Se puede aplicar el teorema TE a partir del momento en el que la esfera toca a la plataforma. Sabemos que allí la velocidad de la esfera viene dada por la Ec. (9). Por otro lado, el trabajo hecho por la fuerza de fricción para mover la esfera hasta que el resorte tenga su máxima contracción será **[+0.4 por halla el trabajo no conservativo]**:

$$W_r = \int_{x_0}^{x_0 - x_{\max}} \left(\frac{mg}{2h} y\right) dy = \frac{mg}{4h}\left[(x_0 - x_{\max})^2 - x_0^2\right]. \tag{10}$$

Utilizando de nuevo el Teorema TE **[+0.3 por plantear el teorema TE]**:

$$\begin{aligned} & W_{\text{no conservativo}} = \Delta\text{EC} + \Delta\text{EP} \\ \rightarrow \quad & \frac{mg}{4h}\left[(x_0 - x_{\max})^2 - x_0^2\right] = \Delta\text{EC} + \Delta\text{EP}, \end{aligned} \tag{11}$$

tal que **[+0.15 por determinar la cada energía cinética]**

$$\begin{aligned} \text{EC}_i &= \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{mg}{4h}\left(x_0^2 - h^2\right) + mg(h - x_0) \\ \text{EC}_f &= 0, \text{ (porque en la contracción máxima la esfera se detiene).} \end{aligned} \tag{12}$$

Además, hay dos energías potenciales: la gravitacional EP_{grav} y la elástica $\text{EP}_{\text{elástica}}$, tal que **[+0.2 por determinar cada energía]**

$$\begin{aligned} \text{EP}^i_{\text{grav}} &= mgx_0 \\ \text{EP}^f_{\text{grav}} &= mg\left(x_0 - x_{\max}\right) \\ \text{EP}^i_{\text{elástica}} &= 0, \text{ (ya que inicialmente el resorte no está estirado ni contraído)} \\ \text{EP}^f_{\text{elástica}} &= \frac{1}{2}\beta x_{\max}^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Así, el teorema TE será **[+0.2 por reeemplazar correctamente en el teorema TE (no importa si no llega al resultado esperado)]**:

$$\begin{aligned} & W_{\text{no conservativo}} = \Delta\text{EC} + \Delta\text{EP}_{\text{grav}} + \Delta\text{EP}_{\text{elástica}} \\ \rightarrow \quad & \frac{mg}{4h}\left[(x_0 - x_{\max})^2 - x_0^2\right] = -\left[\frac{mg}{4h}\left(x_0^2 - h^2\right) + mg(h - x_0)\right] - mgx_{\max} + \frac{1}{2}\beta x_{\max}^2 \\ \rightarrow \quad & \frac{mg}{4h}(x_0 - x_{\max})^2 = \frac{mgh}{4} - mg(h - x_0) - mgx_{\max} + \frac{1}{2}\beta x_{\max}^2 \\ \rightarrow \quad & \frac{mg}{4h}(x_0 - x_{\max})^2 = -\frac{3}{4}mgh + mgx_0 - mgx_{\max} + \frac{1}{2}\beta x_{\max}^2 \\ \rightarrow \quad & \frac{mg}{4h}(x_0 - x_{\max})^2 - \frac{1}{2}\beta x_{\max}^2 + mgx_{\max} + mg\left(\frac{3h}{4} - x_0\right) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

- **Método 2**: Teniendo en cuenta las energías cuando la esfera es soltada y cuando se detiene al comprimir el resorte, se tiene que **[+0.2 por determinar cada energía]**:

$$\begin{aligned} \text{EC}_i &= 0 \\ \text{EC}_f &= 0 \\ \text{EP}^i_{\text{grav}} &= mgh \\ \text{EP}^f_{\text{grav}} &= mg(x_0 - x_{\max}) \\ \text{EP}^i_{\text{elástica}} &= 0, \\ \text{EP}^f_{\text{elástica}} &= \frac{1}{2}\beta x_{\max}^2. \end{aligned} \tag{15}$$

Por otro lado, el trabajo hecho por la fuerza de fricción en todo el recorrido es **[+0.4 por hallar el trabajo no conservativo]**:

$$W_r = \frac{mg}{2h}\int_h^{x_0-x_{\max}} y dy = \frac{mg}{4h}\left[(x_0 - x_{\max})^2 - h^2\right]. \tag{16}$$

Usando el teorema TE **[+0.2 por plantear el teorema TE y +0.2 por reemplazar correctamente en el teorema TE]**:

$$\frac{mg}{4h}\left[(x_0 - x_{\max})^2 - h^2\right] = mg(x_0 - x_{\max} - h) + \frac{1}{2}\beta x_{\max}^2. \tag{17}$$

Despejando:

$$\begin{aligned} &\rightarrow \quad \frac{mg}{4h}\left[(x_0 - x_{\max})^2 - h^2\right] - mg(x_0 - x_{\max} - h) - \frac{1}{2}\beta x_{\max}^2 = 0 \\ &\rightarrow \quad \frac{mg}{4h}(x_0 - x_{\max})^2 - \frac{1}{2}\beta x_{\max}^2 + mgx_{\max} + mg\left(\frac{3h}{4} - x_0\right) = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

(c) **Nota: Hubo un error en el planteamiento original del problema, así que las respuestas que se piden están mal. Se calificará el procedimiento más que la respuesta final.**

La potencia instantánea producto de una fuerza $\vec{F}$ viene dada por **[+0.1 por plantear la potencia]**:

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v}, \tag{19}$$

con $\vec{v}$ la velocidad instantánea del sistema, la cual se calculará con el teorema TE.

Por simplicidad, se usará el método 2 del numeral anterior. Sea $x_{\max}$ la contracción máxima del resorte. Así, el trabajo de la fuerza de rozamiento para ir desde lo alto del tubo hasta la altura $x_0 - x_{\max}/2$ es **[+0.1 por determinar la coordenada final del sistema y +0.2 por hallar el trabajo no conservativo]**:

$$W_r = \frac{mg}{2h}\int_h^{x_0-x_{\max}/2} y dy = \frac{mg}{4h}\left[\left(x_0 - \frac{x_{\max}}{2}\right)^2 - h^2\right] \tag{20}$$

En este caso, sea v la velocidad pedida. Así **[+0.3 por determinar cada energía]**:

$$\begin{aligned} \mathrm{EC}_i &= 0 \\ \mathrm{EC}_f &= \frac{1}{2}mv^2 \\ \mathrm{EP}^i_{\mathrm{grav}} &= mgh \\ \mathrm{EP}^f_{\mathrm{grav}} &= mg\left(x_0 - \frac{x_{\max}}{2}\right) \\ \mathrm{EP}^i_{\mathrm{elástica}} &= 0, \\ \mathrm{EP}^f_{\mathrm{elástica}} &= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{x_{\max}}{2}\right)^2 = \frac{\beta}{8}x_{\max}^2 \end{aligned} \tag{21}$$

Por lo tanto, del teorema TE, la magnitud de la velocidad será **[+0.2 por plantear el teroema TE y +0.2 por despejar la velocidad]**:

$$\begin{aligned} &\frac{mg}{4h}\left[\left(x_0 - \frac{x_{\max}}{2}\right)^2 - h^2\right] = \frac{1}{2}mv^2 + mg\left(x_0 - \frac{x_{\max}}{2} - h\right) + \frac{\beta}{8}x_{\max}^2 \\ &\rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{g}{2h}\left[\left(x_0 - \frac{x_{\max}}{2}\right)^2 - h^2\right] - 2g\left(x_0 - \frac{x_{\max}}{2} - h\right) - \frac{\beta}{4m}x_{\max}^2} \end{aligned} \tag{22}$$

Vectorialmente, dado que la esfera cae **[+0.1 por escribir v de forma vectorial]**:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -v\,\hat{\mathrm{e}}_y \\ &= -\left(\sqrt{\frac{g}{2h}\left[\left(x_0 - \frac{x_{\max}}{2}\right)^2 - h^2\right] - 2g\left(x_0 - \frac{x_{\max}}{2} - h\right) - \frac{\beta}{4m}x_{\max}^2}\right)\hat{\mathrm{e}}_y \end{aligned} \tag{23}$$

Por otro lado, la fuerza de fricción en la posición pedida, viene dada por **[+0.2 por hallar la fuerza en la coordenada pedida]**:

$$\vec{F} = \frac{mg}{2h}\left(x_0 - \frac{x_{\max}}{2}\right)\hat{\mathrm{e}}_y, \tag{24}$$

que al reemplazar en la Ec. (19) da el resultado pedido **[+0.1 porreemplazar en P]**.