Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano (enero 2025)

Curso : Probabilidad y Estadística
Sigla : EYP1113
Profesores : Hernán Robledo A. - Felipe Ossa M.

PAUTA INTERROGACIÓN 2

Pregunta 1 (6 puntos)

Cierto influencer de gran trayectoria que realiza una única publicación al día se dio cuenta que el 3.4 % de todas sus publicaciones fueron exitosas (más de 10.000 me gusta en Instagram). Sin embargo, no ha sido capaz de identificar cuál es el patrón de éxito de sus publicaciones, por lo que considera que todas las publicaciones son independientes entre sí en cuanto a si son exitosas o no.

a) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que en los últimos 10 días (incluido el décimo) haya tenido al menos dos publicaciones exitosas?

b) (3 puntos) ¿Cuántos días se espera que deban pasar hasta que tres publicaciones sean exitosas?

Solución:

a) El número de publicaciones exitosas en 10 días es una variable aleatoria X con distribución Binomial de parámetros $n = 10$ y $p = 0.034$, ya que cada día corresponde a una secuencia de variables aleatorias Bernoulli independientes entre sí.

Se pide $\mathsf{P}(X \geq 2) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 1) = 1 - \texttt{pbinom(1,10,0.034)} = 0.0433$

Asignación de Puntaje:

Si estudiante obtiene el valor correcto de la probabilidad solicitada de una forma distinta a esta pauta pero razonable, asignar todo el puntaje.

Logro 1 [1.0 ptos]: Reconocer la variable aleatoria aludida con un modelo Binomial con los parámetros $n = 10$ y $p = 0.034$.

Logro 2 [0.5 ptos]: Plantear el evento apropiado (e.g. $P(X \geq 2)$)

Logro 3 [1.5 ptos]: Usar formulario u otros para llegar al valor numérico de la probabilidad pedida.

b) El número de intentos hasta que se tengan tres publicaciones exitosas es una variable aleatoria Y con distribución Binomial Negativa de parámetros $k = 3$ y probabilidad $p = 0.034$, ya que cada día corresponde a una secuencia de variables aleatorias Bernoulli independientes entre sí.

Se pide $\mathsf{E}(Y) = k/p = 88.2352$.

Asignación de Puntaje:

Si estudiante obtiene el valor correcto de lo pedido de una forma distinta a esta pauta pero razonable, asignar todo el puntaje.

Logro 4 [2 ptos]: reconocer distribución de la variable aleatoria Y en cuestión como Binomial-Negativa con parámetros correctos.

Logro 5 [1 pto]: Plantear el cálculo del valor esperado de Y, y llegar a su valor correcto.

Pregunta 2 (6 puntos)

Con el auge de los modelos de lenguaje generativo, como ChatGPT, las empresas tecnológicas enfrentan el desafío de planificar los costos energéticos y de servidores necesarios para operar los chats que han desarrollado. Para realizar estos cálculos, una compañía asumirá que el número de consultas ingresadas al servidor sigue un proceso de Poisson con una tasa promedio de 4,000 (cuatro mil) consultas por hora.

a) (3 puntos) Contando desde las 9:00 AM de mañana, ¿cuántos minutos se espera que pasen hasta recibir doscientas consultas en el servidor?

b) (3 puntos) Si históricamente se ha observado que el 0.3 % de las consultas recibidas requieren una respuesta negativa por infringir normas de propiedad intelectual, ¿cuál es la probabilidad de que, después de las doscientas consultas indicadas en el ítem anterior, se registren exactamente dos consultas que infringen dichas normas en los siguientes cinco minutos?

Solución:

a) Sea X_t el número de consultas recibidas en el intervalo $(0, t)$. Por el enunciado, $X_t \sim$ Poisson$(\nu \cdot t)$, donde $\nu = 4000$ consultas/hora. Dado que se consulta por temporalidad en minutos, se tiene que

$$\nu_{\text{minuto}} = 4000 \cdot \frac{1}{60} \frac{\text{consultas}}{\text{minuto}} = \frac{200}{3} \frac{\text{consultas}}{\text{minuto}}.$$

Por las propiedades del proceso Poisson, el tiempo en minutos transcurrido hasta recibir 200 consultas es una variable aleatoria $T_{200} \sim$ Gamma$(k = 200, v = 200/3)$. Se pide

$$\mathsf{E}(T_{200}) = \frac{k}{v} = \frac{200}{200/3} = 3 \text{ minutos.}$$

Asignación de Puntaje:

Si estudiante obtiene el valor correcto de lo pedido de una forma distinta a esta pauta pero razonable, asignar todo el puntaje.

Logro 1 [0.5 pto]: Calcular tasa ν en eventos por minuto. Si se utiliza $\nu = 4000$ consultas por hora, contar este logro si respuesta se expresa en minutos finalmente.

Logro 2 [1.5 pto]: Identificar la variable aleatoria aludida como Gamma con parámetros $k = 200$ y ν como la tasa media.

Logro 3 [1 pto]: Responder utilizando el valor medio de T, y expresar respuesta en minutos.

b) Sea Y_t el número de consultas recibidas que infrigen las normas de propiedad intelectual en el tiempo $(0, t)$. Como estas corresponden a un $0.3\,\%$ de todas las consultas recibidas, entonces Y_t es un proceso Poisson con tasa $\nu = 200/3 \cdot 0.003 = 0.2$. Esto es,

$$Y_t \sim \text{Poisson}\,(0.2 \cdot t)\,.$$

Por la propiedad de pérdida de memoria del proceso Poisson, los eventos ocurridos dentro del intervalo de tiempo en que ocurrieron las doscientas consultas indicadas en el ítem anterior son independientes de los que ocurran después de estos. Así, se pide $\mathsf{P}(Y_5 = 2)$.

$$\mathsf{P}(Y_5 = 2) = \frac{e^{-0.2 \cdot 5}(0.2 \cdot 5)^2}{2!} = \frac{e^{-1} \cdot 1^2}{2!} = \texttt{dpois(2,1)} = 0.1839$$

Asignación de Puntaje:

Si estudiante obtiene el valor correcto de lo pedido de una forma distinta a esta pauta pero razonable, asignar todo el puntaje.

Logro 4 [1 pto]: Identificar proceso de consultas con infracciones como Poisson, con tasa de ocurrencias $\nu \cdot 0.003$.

Logro 5 [1 pto]: Reconocer variable en cuestión como Poisson con parámetro $\lambda = \nu \cdot 0.003 \cdot 5$ (o el equivalente en las unidades de tiempo).

Logro 6 [1 pto]: Plantear correctamente probabilidad y llegar al resultado correcto.

Pregunta 3 (6 puntos)

Considere las variables aleatorias X e Y, que tienen una distribución conjunta dada por el siguiente modelo,

$$X \sim \text{Geométrica}(1/4)$$
$$Y \mid X = x \sim \text{Binomial}(x, 2/5)$$

a) (3 puntos) Encuentre el valor esperado marginal de Y, es decir $\mathsf{E}(Y)$.

b) (3 puntos) Encuentre la varianza marginal de Y, es decir $\text{Var}(Y)$.

Solución:

a Utilizando la ley de esperanzas iteradas,

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(E(Y|X)) \\ &= E(X \cdot 2/5) \\ &= \frac{2}{5}E(X) \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1/4} = \frac{8}{5} = 1.6 \end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

Si estudiante obtiene el valor correcto de lo pedido de una forma distinta a esta pauta pero razonable, asignar todo el puntaje.

Logro 1 [1 pto]: Utilizar ley de esperanzas iteradas.

Logro 2 [0.5 ptos]: Obtener $E(Y|X)$.

Logro 3 [1.5 ptos]: Obtener finalmente $E(Y)$.

b Utilizando la ley de varianza total

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \text{Var}(E(Y|X)) + E(\text{Var}(Y|X)) \\ &= \text{Var}(X \cdot 2/5) + E(X \cdot 2/5 \cdot 3/5) \\ &= \frac{4}{25}\text{Var}(X) + \frac{6}{25}E(X) \\ &= \frac{4}{25} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4}}{(1/4)^2} + \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{1/4} \\ &= \frac{48}{25} + \frac{24}{25} \\ &= \frac{72}{25} \\ &= 2.88 \end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

Si estudiante obtiene el valor correcto de lo pedido de una forma distinta a esta pauta pero razonable, asignar todo el puntaje.

Logro 1 [1 pto]: Utilizar ley de varianza total.

Logro 2 [0.5 ptos]: Obtener Var$(Y|X)$ y $E(Y|X)$.

Logro 3 [1.5 ptos]: Obtener finalmente Var(Y).

Pregunta 4 (6 puntos)

Sea X una variable aleatoria con la siguiente función de densidad,

$$f_X(x) = -\ln x\,, \qquad 0 < x < 1$$

y la transformación $Y = 3X^2$.

Calcule $f_Y(0.75)$, la función densidad de Y evaluada en $y = 0.75$.

Solución:

Con $g(x) = 3x^2$, obtenemos $g^{-1}(y) = \sqrt{y/3}$ para todo $y \in [0, 3]$. Luego, por formulario,

$$f_Y(y) = f_X\left(\sqrt{y/3}\right) \cdot \left|\frac{d}{dy}\sqrt{y/3}\right| = -\ln\left(\sqrt{y/3}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{3y}} = \frac{\ln 3 - \ln y}{4\sqrt{3y}}$$

Evaluando en $y = 0.75$ se obtiene

$$f_Y(0.75) = \frac{\ln 3 - \ln 0.75}{4\sqrt{3 \cdot 0.75}} = \frac{\ln 4}{6} = 0.2310$$

Asignación de Puntaje:

Si estudiante obtiene el valor correcto de lo pedido de una forma distinta a esta pauta pero razonable, asignar todo el puntaje.
Logro 1 [1 pto]: Lograr invertir la transformación $y = g(x)$. Si llega a dos raíces, dar todo el puntaje.

Logro 2 [1 pto]: Escribir apropiadamente densidad de Y en su expresión general, con una o dos raíces.

Logro 3 [3 ptos]: Obtener correctamente una expresión explícita para la densidad de Y. A este punto ya debiera sólo quedar una raíz.

Logro 4 [1 pto]: Obtener el valor correcto de $f_Y(0.75)$.

Pregunta 5 (6 puntos)

El próximo 29 de enero se celebrará el Año Nuevo Chino, y las cerezas son un fruto fundamental en esta festividad cultural. Para cumplir con los altos estándares exigidos por sus clientes, una empresa está organizando la cosecha de cerezas provenientes de tres grandes plantaciones que posee. Suponiendo que la producción de cada plantación es independiente entre sí, la siguiente tabla muestra las producciones históricas de la empresa:

Plantación	Promedio	Desviación Estándar
A	1700 toneladas	110 toneladas
B	450 toneladas	30 toneladas
C	1050 toneladas	75 toneladas

De la producción total de cerezas, el 70 %, el 95 %, y el 50 % de cada plantación, respectivamente, estará destinado a la exportación al extranjero (principalmente a China). Suponiendo que la producción de cada plantación sigue una distribución normal, responda las siguientes preguntas:

a) (3 puntos) ¿Cuál es la desviación estándar de la producción total destinada a exportación?

b) (3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtengan más de 2100 toneladas de cerezas destinadas a exportación?

Solución:

a) Alternativa 1: sea P la variable aleatoria que representa la producción total destinada a exportación. Del enunciado se tiene que

$$P = 0.7 \cdot X_A + 0.95 \cdot X_B + 0.5 \cdot X_C.$$

Como P es una suma de variables aleatorias normales independientes, se tiene que

$$P \sim \text{Normal}\left(\mu = 0.7 \cdot 1700 + 0.95 \cdot 450 + 0.5 \cdot 1050, \sigma = \sqrt{0.7^2 \cdot 110^2 + 0.95^2 \cdot 30^2 + 0.5^2 \cdot 75^2}\right)$$

$$P \sim \text{Normal}\left(\mu = 2142.5,\ \sigma = 90.2635\right)$$

Se pide el parámetro σ de P. Así, $\sigma = 90.2635$.

Alternativa 2: la desviación estándar es la raíz de la varianza. Por propiedades de varianza, se tiene que

$$\begin{aligned}\text{Var}(P) &= \text{Var}(0.7 \cdot X_A + 0.95 \cdot X_B + 0.5 \cdot X_C) \\ &= 0.7^2 \cdot \text{Var}(X_A) + 0.95^2 \cdot \text{Var}(X_B) + 0.5^2 \cdot \text{Var}(X_C) \\ &= 0.7^2 \cdot 110^2 + 0.95^2 \cdot 30^2 + 0.5^2 \cdot 75^2 = 8147.5\end{aligned}$$

Se pide $\sigma = \sqrt{\text{Var}(P)} = \sqrt{8147.5} = 90.2635$.

Asignación de Puntaje:

Si estudiante obtiene el valor correcto de lo pedido de una forma distinta a esta pauta pero razonable, asignar todo el puntaje.

Logro 1 [1 ptos]: Identificar y definir correctamente la definición de la producción exportada P.

Logro 2 [2 ptos]: Calcular correctamente la varianza de P, utilizando propiedades de varianza o de suma de variables normal.

b) De a) se tiene que $P \sim \text{Normal}\left(\mu = 2142.5,\ \sigma = 90.2635\right)$. Se pide $\text{Pr}(P > 2100)$.

$$\text{Pr}(P > 2100) = 1 - \text{Pr}(P < 2100) = 1 - \Phi\left(\frac{2100 - 2142.5}{90.2635}\right) = 1 - 0.3188 = 0.6812.$$

Asignación de Puntaje:

Si estudiante obtiene el valor correcto de lo pedido de una forma distinta a esta pauta pero razonable, asignar todo el puntaje.

Logro 3 [1 ptos]: Plantear correctamente evento a calcular

Logro 4 [2 ptos]: Calcular correctamente la probabilidad pedida utilizando tabla o computador.