Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano (enero 2025)

Curso : Probabilidad y Estadística
Sigla : EYP1113
Profesores : Hernán Robledo A. - Felipe Ossa M.

PAUTA INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1 (6 puntos)

Considere los eventos A, B y C de un mismo espacio muestral S. Se conoce las siguientes probabilidades,

$$P(B) = 0.65\,, \qquad P(C) = 0.3\,, \qquad P(\overline{B} \mid C) = 0.5$$
$$P(A \cap B) = 0.2\,, \qquad P(A \cap \overline{B} \cap C) = 0.05$$

Calcule la probabilidad $P(A \mid B \cup C)$.

Solución:
Por definición de probabilidad condicional, y regla aditiva

$$\begin{aligned} P(A \mid B \cup C) &= \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(B \cup C)} \\ &= \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(B) + P(C) - P(B \cap C)} \\ &= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(B) + P(C) - P(B \cap C)} \end{aligned}$$

Pero $P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = P(A \cap \overline{B} \cap C)$ y $P(C) - P(B \cap C) = P(\overline{B} \cap C)$. Luego

$$P(A \mid B \cup C) = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B} \cap C)}{P(B) + P(\overline{B} \cap C)} = \frac{0.2 + 0.05}{0.65 + 0.5 \cdot 0.3} = \frac{0.25}{0.8} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

Asignación de Puntaje:

Si estudiante obtiene el valor correcto de la probabilidad solicita de una forma distinta a esta pauta, asignar todo el puntaje.
Logro 1 [2 ptos]: desarrolla la probabilidad solicitada.

- Asignar [2 pto] por utilizar correctamente propiedades de probabilidad para desarrollar la probabilidad de interés.
- Este puntaje se asigna independiente de obtener la respuesta final, y se descuenta de este puntaje si se cometen errores.

Logro 2 [1 pto]: por aplicar probabilidad condicional para desarrollar $P(A|B \cup C)$ o alguna probabilidad desarrollada a partir de esto.

Logro 3 [1 pto]: por aplicar ley de aditividad para desarrollar las probabilidades.

Logro 4 [1 pto]: por usar teorema de probabilidades totales para mostrar las igualdades $P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) = P(A \cap \overline{B} \cap C)$ y $P(C) - P(B \cap C) = P(\overline{B} \cap C)$.

Logro 5 [1 ptos]: por obtener la probabilidad solicitada, $P(A \mid B \cup C) = 0.3125$. Si estudiante desarrolla todo lo anterior pero no logra obtener la probabilidad solicitada, no asignar este puntaje.

Pregunta 2 (6 puntos)

Pedro, Juan, Diego y Max son cuatro amigos que se acordaron reunirse en un bar de Karaoke. Para ese día, cada uno cantará dos canciones, escogidas al azar de una lista de 10 canciones. Cinco de estas canciones son del género Rock, tres son de Hip Hop, y las otras dos pertenecen al género Pop.
Pedro conoce solamente las cinco canciones de Rock, y las demás nos las conoce. Juan, en cambio sólo conoce las tres canciones de Hip Hop. Diego y Max conocen todas las canciones de la lista, y no tienen preferencia alguna.
Una vez que son escogidas al azar dos canciones de esta lista para cada persona, ¿cuál es la probabilidad de que, simultáneamente, a Pedro se le asignen dos canciones de Rock y a Juan no se le asigne ninguna de Hip Hop, y a nadie se le asigne alguna canción de Pop?

Solución:
Sea S el espacio muestral de asignaciones de canciones, y A el evento señalado en la pregunta: Puede verse que tanto a Pedro como a Juan le son asignadas canciones de Rock, y a Diego y Max les son asignadas una canción de Rock y tres de Hip Hop.

- **Alternativa 1:** El total de asignaciones de 10 canciones a las cuatro personas corresponde a

$$\#S = \binom{10}{2\,2\,2\,2\,2} = \frac{10!}{(2!)^5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot 3}{2^4} = 113400$$

  Luego, las asignaciones de canciones que cumplen con el evento solicitado son

$$\begin{aligned}\#A &= \binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2} + \binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}\binom{1}{1} \\ &= 10 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 180\end{aligned}$$

  (entiéndase que el orden de los factores son las asignaciones a Pedro, Juan, Diego y Max, respectivamente).

  Finalmente, la probabilidad pedida es

$$P(A) = \frac{180}{113400} = 0.001587$$

- **Alternativa 2:** Se puede entender la asignación de género de canciones a cada persona como las permutaciones de la lista de 10 canciones, eliminando la misma asignación de género redundantes,

$$\#S = \frac{10!}{5!\,3!\,2!} = \binom{10}{5\,3\,2} = 2520$$

  Luego, las asignaciones de género que cumplen con el evento solicitado son

$$\#A = 1 \cdot 1 \cdot \binom{4}{3} = 4$$

  Donde los factores se entienden en el orden Pedro, Juan, y Diego y Max juntos.

  Finalmente, la probabilidad pedida es

$$P(A) = \frac{4}{2520} = 0.001587$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1 [1 pto]: plantea la probabilidad a calcular.

- Asignar [0.5 ptos] por indicar evento A que a Pedro se le asignen dos canciones de Rock, a Juan no se le asigna ninguna de Hip Hop, y a nadie se le asigna una canción de Pop. Asignar este puntaje a pesar de que A no figure explícito.
- Asignar [0.5 ptos] por plantear fórmula $P(A) = \#A/\#S$.

Logro 2 [1.5 pto]: por obtener $\#S$ como $\binom{10}{2\,2\,2\,2\,2}$ o como $\binom{10}{5\,3\,2}$.

- Asignar puntajes parciales de acuerdo a si la idea planteada para obtener $\#A$ es correcta o no.

Logro 3 [3 pto]: por obtener $\#A$.

- Asignar puntajes parciales de acuerdo a si la idea planteada para obtener $\#A$ es correcta o no.

Logro 4 [0.5 pto]: por obtener la probabilidad solicitada, $P(A) = 0.001587$.

Pregunta 3 (6 puntos)

En la ciudad de Bismarck, capital de Dakota del Norte en los Estados Unidos, la probabilidad de que ocurra alguna precipitación (lluvia, nieve, granizo, etc.), durante un día cualquiera de abril, es de $p = 60\,\%$. Asuma que la ocurrencia o no de precipitaciones en un día es estadísticamente independiente de los demás días.
Durante una semana (7 días) en Bismarck, ¿cuál es la probabilidad de que haya precipitaciones en sólo 3 días de lunes a viernes, y que no haya precipitaciones el sábado y domingo?

Solución:
Sea A el evento señalado. La ocurrencia de precipitaciones en sólo tres días específicos de una semana es $p^3(1-p)^4$, gracias a la independencia de cada día. Además, hay $\binom{5}{3}$ posibles combinaciones de días entre lunes y viernes en donde ocurran las precipitaciones (sábado y domingo no se cuentan en estas combinaciones ya que allí no ocurren precipitaciones). Por lo tanto, la probabilidad pedida es

$$P(A) = \binom{5}{3} 0.6^3 \cdot 0.4^4 = 0.0553$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1 [0.5 pto]: plantea el evento cuya probabilidad es de interés.

- Asignar [0.5 ptos] por indicar evento A que hayan precipitaciones en sólo 3 días de lunes a viernes y que no haya precipitaciones el sábado y domingo.

Logro 2 [3 pto]: por calcular la probabilidad de que hayan precipitaciones en tres de los siete días de la semana $p^3(1-p)^4$.

Logro 3 [2 pto]: por indicar las posibles combinaciones en que puede llover tres de los cinco días de la semana como $\binom{5}{3}$.

Logro 4 [0.5 pto]: por obtener la probabilidad solicitada, $P(A) = 0.0553$.

Pregunta 4 (6 puntos)

Sea X es una variable aleatoria con función de probabilidad dada por

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.2, & \text{si } x = -1, \\ 0.8, & \text{si } x = 2. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A. (2 ptos) Obtenga el valor esperado o esperanza de X.

Solución:

Como X es una variable aleatoria discreta con soporte Θ,

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{x \in \Theta} x \cdot p_X(x) = -1 \cdot p_X(-1) + 2 \cdot p_X(2) = -1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.8 = -0.2 + 1.6 = 1.4.$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1 [1.5 ptos]: expresa y desarrolla correctamente $\mathsf{E}(X)$.

- Asignar [0.5 ptos] por indicar la fórmula $\mathsf{E}(X) = \sum_{x \in \Theta} x \cdot p_X(x)$.
- Asignar [1 pto] por desarrollar E(X) como $-1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.8$.

Logro 2 [0.5 ptos]: obtiene el valor de la esperanza, $\mathsf{E}(X) = 1.4$.

B. (2 ptos) Obtenga la varianza de X.

Solución:

La varianza de una variable aleatoria está dada por $\mathsf{Var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2$.

$$\mathsf{E}(X^2) = \sum_{x \in \Theta} x^2 \cdot p_X(x) = (-1)^2 \cdot 0.2 + (2)^2 \cdot 0.8 = 0.2 + 3.2 = 3.4.$$

Del ítem anterior, $\mathsf{E}(X) = 1.4$. Así,

$$\mathsf{Var}(X) = 3.4 - 1.4^2 = 1.44$$

Asignación de Puntaje:

Logro 3 [1.5 ptos]: expresa y desarrolla correctamente $\mathsf{Var}(X)$.

- Asignar [0.5 ptos] por indicar la fórmula $\mathsf{Var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2$ o por indicar la fórmula $\mathsf{Var}(X) = \sum_{x \in \Theta}(x - \mu_X)^2 \cdot p_X(x)$ sólo si utiliza esta para calcular la varianza.
- Asignar [1 pto] por desarrollar $\mathsf{E}(X^2)$ como $(-1)^2 \cdot 0.2 + (2)^2 \cdot 0.8$, o por reemplazar las cantidades correspondientes en $\sum_{x \in \Theta}(x - \mu_X)^2 \cdot p_X(x)$.

Logro 4 [0.5 ptos]: obtiene el valor de la varianza, $\mathsf{Var}(X) = 1.44$.

C. (2 ptos) Obtenga el Coeficiente de Kurtosis, K_X.

Solución:

El Coeficiente de Kurtosis está dado por

$$K_X = \frac{\mathsf{E}((X-\mu_X)^4)}{\sigma^4} - 3.$$

Del ítem anterior, $\sigma^4 = \mathsf{Var}(X)^2 = 2.0736$. El cuarto momento central lo calculamos por definición:

$$\mathsf{E}((X-\mu_X)^4) = \sum_{x\in\Theta}(x-\mu_X)^4 \cdot p_X(x) = (-1-1.4)^4 \cdot 0.2 + (2-1.4)^4 \cdot 0.8 = 6.7392$$

Así,

$$K_X = \frac{6.7392}{2.0736} - 3 = 0.25$$

Asignación de Puntaje:

Alternativa 1:
Logro 5 [1.5 ptos]: expresa y desarrolla correctamente K_X.

- No se asigna puntaje por fórmula de K_X por ser parte del formulario.
- No se asigna puntaje por obtener σ^4 porque su cálculo corresponde al ítem anterior.
- Asignar [0.5 ptos] por indicar la fórmula $\mathsf{E}((X-\mu_X)^4) = \sum_{x\in\Theta}(x-\mu_X)^4 \cdot p_X(x)$.
- Asignar [1 pto] por desarrollar $\sum_{x\in\Theta}(x-\mu_X)^4 \cdot p_X(x)$ como $(-1-1.4)^4 \cdot 0.2 + (2-1.4)^4 \cdot 0.8$.

Logro 6 [0.5 ptos]: obtiene el valor del Coeficiente de Kurtosis, $K_X = 0.25$.

Alternativa 2:
Logro 5 [1.5 ptos]: expresa y desarrolla correctamente K_X.

- No se asigna puntaje por fórmula de K_X por ser parte del formulario.
- No se asigna puntaje por obtener σ^4 porque su cálculo corresponde al ítem anterior.
- Asignar [1 ptos] por mostrar que $\mathsf{E}((X-\mu_X)^4) = \mathsf{E}(X^4) - 4\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(X^3) + 6\mathsf{E}(X)^2\mathsf{E}(X^2) - 3\mathsf{E}(X)^4$.
- Asignar [0.3 ptos] por calcular $\mathsf{E}(X^3)$.
- Asignar [0.2 ptos] por calcular $\mathsf{E}(X^4)$.

Logro 6 [0.5 ptos]: obtiene el valor del Coeficiente de Kurtosis, $K_X = 0.25$.

Pregunta 5 (6 puntos)

Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(9-3x) & \text{si } x \in [1,3], \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}.$$

De esta distribución se sabe que

$$E(X) = \frac{15}{9} \quad \text{y} \quad E(X^2) = 3$$

A. (3 ptos) Calcule la mediana de X.

Solución:
Para obtener la mediana se debe resolver $F_X(x_{med}) = 0.5$. Para esto, debemos encontrar $F_X(x)$. Notar que $F_X(x) = 0$ para $x < 1$ pues la densidad toma el valor cero en dicha región, mientras que para $x > 3$, $F_X(x) = 1$, pues toda la densidad de X está en el intervalo $[1,3]$. Así, para $x \in [1,3]$,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_1^x \frac{1}{6} \cdot (9-3t)dt = -\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{5}{4}.$$

Así, la mediana está dada por la solución de

$$0.5 = -\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{5}{4} \iff -\frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{7}{4} = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se tiene que

$$x_1 = \frac{-3/2 + \sqrt{(3/2)^2 - 4(-1/4)(-7/4)}}{2(-1/4)} = 1.585786,$$

$$x_2 = \frac{-3/2 - \sqrt{(3/2)^2 - 4(-1/4)(-7/4)}}{2(-1/4)} = 4.414214.$$

Como x_2 está fuera del soporte de X, entonces se tiene que $x_{med} = 1.585786$.

Asignación de Puntaje:

Logro 1 [2 ptos]: expresa y desarrolla correctamente el cálculo de la mediana.

- Asignar [0.5 ptos] por indicar la ecuación $F(x_{med}) = 0.5$ o algo equivalente.
- Asignar [1 pto] por obtener $F_X(x) = -x^2/4 + 3x/2 - 5/4$.
- Asignar [0.5 pto] por plantear la ecuación $F_X(x) = -x^2/4 + 3x/2 - 7/4 = 0$.

Logro 2 [1 ptos]: obtiene el valor de la mediana, $x_{med} = 1.5857$.

B. (3 ptos) Calcule el Coeficiente de Asimetría, θ_X. *Ayuda:* $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Solución:
El coeficiente de asimetría corresponde a

$$\theta_X = \frac{\mathsf{E}((X-\mu_X)^3)}{\sigma_X^3}.$$

De la ayuda del enunciado se tiene que $\sigma^2 = \mathsf{Var}(X) = \mathsf{E}(X^2) - \mathsf{E}(X)^2 = 3 - (5/3)^2 = 2/9 = 0.\bar{2}$. Así, $\sigma^3 = (\sigma^2)^{3/2} = 0.104756$. Finalmente, se debe calcular el tercer momento central.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}((X-\mu_X)^3) &= \int_1^3 (x-\mu_X)^3 \cdot f_X(x)dx \\
&= \int_1^3 (x^3 - 3x^2\mu_X + 3x\mu_X^2 - \mu_X^3) \cdot f_X(x)dx \\
&= \int_1^3 x^3 \cdot f_X(x)dx - 3\mu_X \int_1^3 x^2 \cdot f_X(x)dx + 3\mu_X^2 \int_1^3 x \cdot f_X(x)dx - \mu_X^3 \int_1^3 f_X(x)dx \\
&= \mathsf{E}(X^3) - 3\mathsf{E}(X)\mathsf{E}(X^2) + 3\mathsf{E}(X)^2\mathsf{E}(X) - \mu_X^3 \cdot 1 \\
&= \mathsf{E}(X^3) - 3\mu_X\mathsf{E}(X^2) + 3\mu_X^3 - \mu_X^3 \\
&= \mathsf{E}(X^3) - 3\mu_X\mathsf{E}(X^2) + 2\mu_X^3.
\end{aligned}$$

El primer momento, μ_X, y el segundo momento $\mathsf{E}(X^2)$ están entregados por enunciado. Sólo falta calcular el tercer momento, $\mathsf{E}(X^3)$.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X^3) = \int_1^3 x^3 \cdot f_X(x)dx = \int_1^3 x^3 \cdot \frac{1}{6}(9-3x)dx &= \frac{1}{6}\left(\frac{9x^4}{4} - \frac{3x^5}{5}\right)\Bigg|_1^3 \\
&= \frac{1}{6}\left[\left(\frac{9\cdot 3^4}{4} - \frac{3\cdot 3^5}{5}\right) - \left(\frac{9\cdot 1^4}{4} - \frac{3\cdot 1^5}{5}\right)\right] = 5.8.
\end{aligned}$$

Así,

$$\theta_X = \frac{\mathsf{E}(X^3) - 3\mu_X\mathsf{E}(X^2) + 2\mu_X^3}{\sigma^3} = \frac{5.8 - 3\cdot(5/3)\cdot 3 + 2\cdot(5/3)^3}{0.104756} = 0.5656$$

Asignación de Puntaje:

Logro 3 [2.5 ptos]: expresa y desarrolla correctamente el cálculo del coeficiente de asimetría.

- No se asigna puntaje por fórmula de θ_X por estar en formulario.
- Asignar [0.5 ptos] por obtener $\sigma^3 = \mathsf{Var}(X)^{3/2} = 0.104756$.
- Asignar [1 pto] por mostrar que $\mathsf{E}((X-\mu_X)^3) = \mathsf{E}(X^3) - 3\mu_X\mathsf{E}(X^2) + 2\mu_X^3$.
- Asignar [1 pto] por obtener $\mathsf{E}(X^3) = 5.8$.

Logro 4 [0.5 ptos]: obtiene el valor del coeficiente de asimetría, $\theta_X = 0.5656$.

Pregunta 6 (6 puntos)

El Departamento de Evaluación, Medición y Registro Educacional (DEMRE) publicó este lunes los puntajes obtenidos por las personas que rindieron la Prueba de Acceso a la Educación Superior (PAES). Para calcular el puntaje de cualquiera de las pruebas, el DEMRE utiliza las respuestas de los postulantes a cada ítem de la prueba y construye un modelo estadístico que transforma dichas respuestas en valores provenientes de una distribución normal estándar. Posteriormente, estos valores son escalados (multiplicados por una constante y luego sumados a otra) para ajustar el rango de puntajes entre 100 y 1000, facilitando así su interpretación.

Suponga que usted no está de acuerdo con la escala de puntajes mencionada (entre 100 y 1000) y desea transformar los puntajes iniciales provenientes de la distribución normal estándar (antes de ser escalados) a otra escala. En particular, quiere que los puntajes sigan una distribución normal con una media de 50 y un coeficiente de variación de 0.4. Asumiendo que las instituciones de educación superior tienen cupos ilimitados, responda las siguientes preguntas de acuerdo con esta nueva escala de puntajes:

A. (2 ptos) La carrera de cierta institución tiene un puntaje de corte de 75 puntos para ser aceptado. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga un puntaje suficiente para ser aceptada en esta carrera?

Solución:
Sea X la variable aleatoria que representa el puntaje obtenido en la PAES. Del enunciado se tiene que X sigue una distribución normal, y que su parámetro $\mu = 50$. Por otra parte, obtenemos el parámetro de escala σ a través del coeficiente de variación $\delta_X = \sigma_X/\mu_X$, obteniendo así $\sigma_X = 0.4 \cdot 50 = 20$. Así, $X \sim N(\mu = 50, \sigma = 20)$.

Se pide Pr$(X \geq 75)$.

$$\text{Pr}(X \geq 75) = 1 - \text{Pr}(X < 75) = 1 - F_X(75) = 1 - \Phi\left(\frac{75-50}{20}\right) = 1 - \Phi(5/4) = 1 - 0.8943502 = 0.1056498$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1 [1.5 ptos]: indica la probabilidad a calcular y la desarrolla.

- Asignar [0.5 ptos] por indicar que $\mu = 50$ y que $\sigma = 20$.
- Asignar [0.5 ptos] por indicar que la probabilidad de interés es Pr$(X \geq 75)$. Asignar este puntaje si estudiante obtiene la probabilidad correcta sin indicar explicitamente la probabilidad de interés.
- Asignar [0.5 ptos] por aplicar complemento y función de distribución normal para obtener la expresión $1 - \Phi((75-50)/20)$.

Logro 2 [0.5 ptos]: por obtener la probabilidad solicitada, Pr$(X \geq 75) = 0.1065$.

B. (2 ptos) Durante la admisión del año anterior, se observó que el puntaje más bajo y más alto de las personas que ingresaron a cierta carrera fue de 60 y 65, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona seleccionada al azar tenga un puntaje dentro de este rango?

Solución:

Se pide Pr $(60 < X < 65)$.

$$\Pr(60 < X < 65) = F_X(65) - F_X(60) = \Phi\left(\frac{65-50}{20}\right) - \Phi\left(\frac{60-50}{20}\right) = \Phi(3/4) - \Phi(1/2) = 0.0819019.$$

Asignación de Puntaje:

Si estudiante no desarrolla item anterior y encuentra en este que $\mu = 50$ y $\sigma = 20$, asignar puntaje al ítem anterior.

Logro 3 [1.5 ptos]: indica la probabilidad a calcular y la desarrolla.

- Asignar [0.5 ptos] por indicar que la probabilidad de interés es Pr$(60 < X < 65)$, o Pr$(60 \leq X \leq 65)$, u otra combinación de desigualdades. Asignar este puntaje si estudiante obtiene la probabilidad correcta sin indicar explicitamente la probabilidad de interés.
- Asignar [0.5 ptos] por Pr $(60 < X < 65) = F_X(65) - F_X(60)$.
- Asignar [0.5 ptos] por indicar $\Phi((65-50)/20)$ y $\Phi((60-50)/20)$.

Logro 4 [0.5 ptos]: por obtener la probabilidad solicitada, Pr$(60 < X < 65) = 0.0819$.

C. (2 ptos) Suponga que un estudiante está muy emocionado porque en una de las pruebas obtuvo un puntaje que está dentro del 5 % de los mejores puntajes de Chile. ¿Cuál es el menor puntaje que este estudiante pudo haber obtenido considerando que está dentro del 5 % de los mejores puntajes?

Solución:
Se pide obtener el percentil que acumula $95\,\%$ de probabilidad de una distribución normal de parámetros μ y σ, ya que este percentil representa el puntaje mínimo que el 5 % de menores puntajes de Chile puede obtener para estar dentro de este rango. Así, se pide encontrar el valor $S_{0.95}$ tal que

$$F_X(S_{0.95}) = 0.95.$$

De la propiedad $F_X(S_p) = \Phi\left((S_p - \mu)/\sigma\right) = p$, se tiene que para calcular un percentil S_p cualquiera,

$$\frac{S_p - \mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(p) \quad \Longleftrightarrow \quad S_p = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p).$$

Así,

$$S_p = 50 + 20 \cdot \Phi^{-1}(0.95) = 50 + 20 \cdot 1.645 = 82.9.$$

Ayuda: recuerde que las funciones de R `dnorm(x,mu,sigma)`, `pnorm(x,mu,sigma)`, `qnorm(p,mu,sigma)`, sirven para calcular la densidad, la función de distribución acumulada, y los percentiles de una normal estándar de parámetros $\mu =$ `mu` y $\sigma =$ `sigma`.

Asignación de Puntaje:

Si estudiante no desarrolla item 6.A. y encuentra en este ítem que $\mu = 50$ y $\sigma = 20$, asignar puntaje al ítem 6.A.

Logro 5 [1.5 ptos]: indicar y desarrollar el cálculo de $S_{0.95}$.

- Asignar [0.5 ptos] por plantear la ecuación $F_X(S_{0.95}) = 0.95$.
- Asignar [0.5 ptos] por plantear $\Phi\left((S_p - \mu)/\sigma\right) = p$. Asignar este puntaje si estudiante indica la expresión del siguiente punto sin pasar por este paso.
- Asignar [0.5 ptos] por obtener $S_p = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p)$.

Logro 6 [0.5 ptos]: por obtener el percentil solicitado, $S_{0.95} = 82.9$. Puede ser más exacto o no, con una centésima de tolerancia debido al uso de tabla.