Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2025

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Profesores	:	**Ricardo Aravena, Maritza Márquez , Bladimir Morales , Mauricio Toro, Ricardo Olea, Jose Ordoñez, Felipe Ossa, Nixón Jerez, Daniel Saavedra, Cristian Capetillo y Hernán Robledo**

PAUTA INTERROGACIÓN 3

Pregunta 1

Un equipo de investigadores está estudiando si cierto modelo de lenguaje generativo presenta *sesgos políticos o emocionales* en sus respuestas. Para ello, a cada respuesta del modelo de lenguaje se le asignan dos puntajes: un puntaje de sesgo político que se asume que es una variable aleatoria X con distribución Gamma$(\alpha = 4,\ \nu = 5)$, y un puntaje de sesgo emocional que se asume que es una variable aleatoria Y con distribución Gamma$(\alpha = 2,\ \nu = 5)$, donde X y Y se asumen independientes entre sí.

(a) **[2.0 Ptos.]** Suponga que se obtiene una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ de puntajes de sesgo político, $X_1, \ldots, X_n$, los cuales se consideran independientes entre sí. Calcule la probabilidad aproximada de que $\overline{X} > 0.85$.

(b) **[2.0 Ptos.]** Para analizar el efecto conjunto de ambos tipos de sesgo, se define un puntaje total combinado como $T = 2X + 3Y$. Calcule Cor(X, T).

(c) **[2.0 Ptos.]** La proporción de sesgo político dentro del sesgo total de una respuesta se define como

$$Z = \frac{X}{X + Y},$$

donde $X + Y$ representa el sesgo total de la respuesta generada por el modelo. Obtenga la función de densidad de Z y señale si corresponde a una distribución conocida.

Solución

(a) Dado que $X \sim$ Gamma$(\alpha = 4, \nu = 5)$, su esperanza y varianza son:

$$E[X] = \frac{\alpha}{\nu} = \frac{4}{5} = 0.8, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha}{\nu^2} = \frac{4}{25} = 0.16.$$

Por tanto, la desviación estándar poblacional es:

$$\sigma_X = \sqrt{0.16} = 0.4.$$

Sea $\overline{X}$ la media muestral de una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$. Por el *Teorema del Límite Central*, para n grande:

$$\overline{X} \approx N\left(E[X],\ \sqrt{\frac{\mathrm{Var}(X)}{n}}\right) = N\left(0.8,\ \sqrt{\frac{0.16}{100}}\right) = N(0.8,\ 0.04).$$

Queremos calcular:

$$P(\overline{X} > 0.85) = P\left(Z > \frac{0.85 - 0.8}{\sqrt{0.0016}}\right) = P(Z > 1.25),$$

donde $Z \sim N(0, 1)$.

De tablas de la normal estándar:

$$P(Z > 1.25) = 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056.$$

(b) Sea $T = 2X + 3Y$. Dado que X y Y son independientes, tenemos:

$$\mathrm{Cov}(X, T) = \mathrm{Cov}(X, 2X + 3Y) = 2\,\mathrm{Cov}(X, X) + 3\,\mathrm{Cov}(X, Y) = 2\,\mathrm{Var}(X),$$

ya que $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Luego:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha_X}{\nu^2} = \frac{4}{25} = 0.16, \qquad \mathrm{Var}(Y) = \frac{\alpha_Y}{\nu^2} = \frac{2}{25} = 0.08.$$

Por tanto:

$$\mathrm{Cov}(X, T) = 2(0.16) = 0.32.$$

Además:

$$\mathrm{Var}(T) = 4\,\mathrm{Var}(X) + 9\,\mathrm{Var}(Y) = 4(0.16) + 9(0.08) = 0.64 + 0.72 = 1.36.$$

La correlación es:

$$\mathrm{Cor}(X, T) = \frac{\mathrm{Cov}(X, T)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(T)}} = \frac{0.32}{\sqrt{0.16 \times 1.36}} = \frac{0.32}{\sqrt{0.2176}} = \frac{0.32}{0.4666} \approx 0.686.$$

(c) Sabemos que $X \sim$ Gamma$(\alpha_X = 4, \nu = 5)$ y $Y \sim$ Gamma$(\alpha_Y = 2, \nu = 5)$, donde X y Y son independientes. Definimos la variable de interés:

$$Z = \frac{X}{X + Y},$$

la cual representa la proporción de sesgo político respecto del sesgo total. Nuestro objetivo es encontrar la función de densidad $f_Z(z)$.

Sabemos que la función de densidad de $Z = g(X, Y)$ se obtiene a partir de:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}\big(x, g^{-1}(x, z)\big) \left| \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}(x, z) \right| dx,$$

donde $g^{-1}(x, z)$ representa la variable Y escrita en función de x y z.

A partir de la definición $Z = X/(X + Y)$, despejamos Y:

$$Z = \frac{X}{X + Y} \quad \Rightarrow \quad Z(X + Y) = X \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{X(1 - Z)}{Z}.$$

Por tanto,

$$g^{-1}(x, z) = \frac{x(1 - z)}{z}.$$

$$\frac{\partial}{\partial z} g^{-1}(x, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x(1 - z)}{z} \right) = \frac{\partial}{\partial z}(xz^{-1} - x) = -\frac{x}{z^2}.$$

Por tanto,

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} g^{-1}(x, z) \right| = \frac{x}{z^2}.$$

Sabemos que, al ser independientes:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y),$$

con:

$$f_X(x) = \frac{\nu^{\alpha_X}}{\Gamma(\alpha_X)} x^{\alpha_X - 1} e^{-\nu x}, \quad f_Y(y) = \frac{\nu^{\alpha_Y}}{\Gamma(\alpha_Y)} y^{\alpha_Y - 1} e^{-\nu y}, \quad x, y > 0.$$

Por tanto:

$$f_Z(z) = \int_0^\infty f_X(x)\, f_Y\left(\frac{x(1-z)}{z}\right) \left|\frac{\partial}{\partial z} g^{-1}(x,z)\right| dx.$$

Sustituyendo las expresiones explícitas:

$$f_Z(z) = \int_0^\infty \frac{\nu^{\alpha_X}}{\Gamma(\alpha_X)} x^{\alpha_X - 1} e^{-\nu x} \cdot \frac{\nu^{\alpha_Y}}{\Gamma(\alpha_Y)} \left(\frac{x(1-z)}{z}\right)^{\alpha_Y - 1} e^{-\nu \frac{x(1-z)}{z}} \cdot \frac{x}{z^2}\, dx.$$

Agrupando constantes y potencias de x:

$$f_Z(z) = \frac{\nu^{\alpha_X+\alpha_Y}}{\Gamma(\alpha_X)\Gamma(\alpha_Y)} \frac{(1-z)^{\alpha_Y-1}}{z^{\alpha_Y+1}} \int_0^\infty x^{\alpha_X+\alpha_Y-1} e^{-\nu x\left(\frac{1}{z}\right)} dx.$$

La integral tiene la forma de una función Gamma:

$$\int_0^\infty x^{\alpha_X+\alpha_Y-1} e^{-\nu x/z}\, dx = \Gamma(\alpha_X+\alpha_Y) \left(\frac{z}{\nu}\right)^{\alpha_X+\alpha_Y}.$$

Sustituyendo:

$$f_Z(z) = \frac{\nu^{\alpha_X+\alpha_Y}}{\Gamma(\alpha_X)\Gamma(\alpha_Y)} \frac{(1-z)^{\alpha_Y-1}}{z^{\alpha_Y+1}} \Gamma(\alpha_X+\alpha_Y) \left(\frac{z}{\nu}\right)^{\alpha_X+\alpha_Y}.$$

Simplificando:

$$f_Z(z) = \frac{\Gamma(\alpha_X+\alpha_Y)}{\Gamma(\alpha_X)\Gamma(\alpha_Y)} z^{\alpha_X-1}(1-z)^{\alpha_Y-1}, \quad 0 < z < 1.$$

La función de densidad obtenida corresponde a una distribución Beta con parámetros:

$$Z \sim \text{Beta}(\alpha_X = 4,\ \alpha_Y = 2).$$

Asignación de Puntaje:

(a)

Logro 1 [1.5 ptos]: por aplicar Teorema del Límite Central para obtener que $\overline{X} \sim$ Normal$(0.8, 0.04)$.

- [0.7 pto] por señalar uso del TLC.
- [0.4 pto] por obtener media, 0.8.
- [0.4 pto] por obtener desviación estándar, 0.04.

Logro 2 [0.5 ptos]: por obtener que $P(\overline{X} > 0.85) = 0.106$.

(b)

Logro 3 [1.2 ptos]: por obtener Cov$(X, T) = 0.32$.

- [0.8 pto] por aplicar correctamente propiedades de covarianza.
- [0.2 pto] por identificar que Cov$(X, Y) = 0$.
- [0.2 pto] por obtener que Var$(X) = 0.16$ y Var$(Y) = 0.08$.

Logro 4 [0.6 ptos]: por obtener Var$(T) = 1.36$ tras aplicar propiedades de varianza de suma de variables aleatorias.

- [0.2 pto] por identificar que Cov$(X, Y) = 0$.
- [0.2 pto] por aplicar procedimiento correcto.
- [0.2 pto] por obtener el valor de la varianza correcto.

Logro 5 [0.2 ptos]: por obtener que Cor$(X, T) = 0.686$.

(c)

Logro 6 [0.8 ptos]: por identificar uso de fórmula de transformación de variable aleatoria.

- [0.2 pto] por identificar uso de fórmula de transformación de variable aleatoria.
- [0.4 pto] por identificar $g(x, z)$ o $g(z, y)$ correctamente.
- [0.2 pto] por obtener la derivada de $g(x, z)$ o $g(z, y)$ correctamente.

Logro 7 [0.4 ptos]: por aplicar independencia para separar $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

Logro 8 [0.6 ptos]: por resolver la integral obtenida y obtener una función de densidad como resultado.

Logro 9 [0.2 ptos]: por identificar que $Z \sim$ Beta$(4, 2)$.

Pregunta 2

Previo a las elecciones, los valores de las acciones presentan un alto grado de volatilidad (es decir, un comportamiento errático). Un experto indica que las variaciones porcentuales X de las principales acciones del índice bursatil IPSA se comportan de acuerdo a una distribución con función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\,(1+\theta\,x), \quad \text{con } -1 < x < 1,\ -1 < \theta < 1.$$

Basado en una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de esta distribución, se proponen dos estimadores para el parámetro θ:

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{y} \quad \widehat{\theta}_2 = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3$$

(a) **[2.0 Ptos.]** Muestre que $\widehat{\theta}_1$ corresponde al estimador de momentos de θ.

(b) **[2.0 Ptos.]** Determine si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son o no estimadores consistentes.

(c) **[2.0 Ptos.]** Determine cuál de los dos estimadores de θ propuestos es más eficiente.

Solución

(a) El método de los momentos consiste en igualar el momento teórico de la población con el momento muestral correspondiente. La función de densidad de X es:

$$f_X(x) = \frac{1}{2}(1+\theta x), \quad -1 < x < 1.$$

El valor esperado de X es:

$$E[X] = \int_{-1}^{1} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}x(1+\theta x)\, dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} x\, dx + \theta \int_{-1}^{1} x^2\, dx\right).$$

Como $\int_{-1}^{1} x\, dx = 0$ y $\int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3}$, se obtiene:

$$E[X] = \frac{1}{2}\left(0 + \theta \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{\theta}{3}.$$

Por el método de los momentos, se iguala la media teórica con la media muestral:

$$\overline{X} = E[X] = \frac{\theta}{3} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{\theta} = 3\overline{X}.$$

Como

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 3\overline{X},$$

se concluye que $\widehat{\theta}_1$ corresponde al estimador de momentos del parámetro θ.

(b) Para estudiar la consistencia de un estimador, se analiza su error cuadrático medio (ECM):

$$\mathrm{ECM}(\widehat{\theta}) = E\big[(\widehat{\theta}-\theta)^2\big] = \mathrm{Var}(\widehat{\theta}) + (\mathrm{Sesgo}(\widehat{\theta}))^2.$$

Un estimador es consistente si $\mathrm{ECM}(\widehat{\theta}) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Caso 1: $\widehat{\theta}_1 = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

$$E[\widehat{\theta}_1] = 3E[\overline{X}] = 3E[X] = 3\left(\frac{\theta}{3}\right) = \theta,$$

por lo que el estimador es insesgado.

Además,

$$\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_1) = 9\,\mathrm{Var}(\overline{X}) = 9\,\frac{\mathrm{Var}(X)}{n}.$$

Calculamos $\mathrm{Var}(X)$:

$$E[X^2] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2(1+\theta x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+0\right) = \frac{1}{3},$$

entonces:

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{\theta}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(3-\theta^2).$$

Por tanto:

$$\mathrm{ECM}(\widehat{\theta}_1) = \mathrm{Var}(\widehat{\theta}_1) = \frac{3-\theta^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

de modo que $\widehat{\theta}_1$ es consistente.

Caso 2: $\widehat{\theta}_2 = \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3$.

$$E[X^3] = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^3(1+\theta x)\,dx = \frac{1}{2}\left(0+\theta\cdot\frac{2}{5}\right) = \frac{\theta}{5},$$

por lo que $E[\widehat{\theta}_2] = 5E[\overline{X^3}] = 5(\theta/5) = \theta$. También es insesgado.

La varianza es:

$$\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_2) = 25\,\frac{\mathrm{Var}(X^3)}{n}, \quad \mathrm{Var}(X^3) = E[X^6] - (E[X^3])^2 = \frac{1}{7} - \left(\frac{\theta}{5}\right)^2 = \frac{1}{175}(25-7\theta^2).$$

Por tanto:

$$\mathrm{ECM}(\widehat{\theta}_2) = \frac{25}{n}\cdot\frac{1}{175}(25-7\theta^2) = \frac{1}{7n}(25-7\theta^2) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Así, $\widehat{\theta}_2$ también es consistente.

(c) Un estimador es más eficiente que otro si su error cuadrático medio es menor. Como ambos estimadores son insesgados, basta comparar sus varianzas:

$$\mathrm{ECM}(\widehat{\theta}_1) = \frac{3-\theta^2}{n}, \qquad \mathrm{ECM}(\widehat{\theta}_2) = \frac{1}{7n}(25-7\theta^2).$$

Para $-1 < \theta < 1$:

$$3-\theta^2 < \frac{1}{7}(25-7\theta^2),$$

por lo que:

$$\mathrm{ECM}(\widehat{\theta}_1) < \mathrm{ECM}(\widehat{\theta}_2).$$

En consecuencia, $\widehat{\theta}_1$ es el estimador más eficiente.

Asignación de Puntaje:

(a)

Logro 1 [1.0 ptos]: por obtener que E$(X) = \theta/3$.

Logro 2 [0.5 ptos]: por igualar E$(X) = \overline{X}$.

Logro 3 [0.5 ptos]: por concluir lo solicitado.

(b)

Logro 4 [0.4 ptos]: por indicar que se debe verificar que el Error Cuadrático Medio debe ser igual a 0 para $n \to \infty$.

Logro 5 [0.8 ptos]: por verificar que $\hat{\theta}_1$ es consistente.

- [0.3 pto] por obtener que E$(\hat{\theta}_1) = \theta$.
- [0.3 pto] por obtener que Var$(\hat{\theta}_1) = (3 - \theta^2)/(9n)$.
- [0.2 pto] por verificar que $\lim_{n\to\infty}$ ECM$(\hat{\theta}_1) = 0$.

Logro 6 [0.8 ptos]: por verificar que $\hat{\theta}_2$ es consistente.

- [0.3 pto] por obtener que E$(\hat{\theta}_2) = \theta$.
- [0.3 pto] por obtener que Var$(\hat{\theta}_2) = (25 - 7\theta^2)/(175n)$.
- [0.2 pto] por verificar que $\lim_{n\to\infty}$ ECM$(\hat{\theta}_1) = 0$.

(c)

Logro 7 [1.0 ptos]: por indicar que se debe verificar cuál estimador tiene menor ECM, o cual tiene menor varianza si se indica que ambos son insesgados.

Logro 8 [1.0 ptos]: por concluir que $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$ tras verificar que ECM$(\hat{\theta}_1) <$ ECM$(\hat{\theta}_2)$.

- Logros 8 sí puede asignarse si estudiante obtiene expresiones para los ECM distintas a las de esta pauta, pero sólo si obtiene conclusiones coherentes con sus propios resultados, incluso en el caso de concluir que $\hat{\theta}_2$ es más eficiente.

Pregunta 3

Para evaluar la factibilidad de instalar un parque eólico en el norte de Chile, se instala una torre anemométrica que registra la velocidad del viento (en m/s) cada 10 minutos. Estas velocidades se modelan mediante una variable aleatoria V que sigue una distribución Weibull$(\eta,\, \beta)$, donde $\beta > 0$ es conocido a partir de mediciones previas. Cada día se registran un total de m mediciones. Luego, se define la velocidad mínima del j-ésimo día como:

$$X_j = \text{mín}\{V_{j,1}, V_{j,2}, \ldots, V_{j,m}\}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Por simplicidad, se asume que las velocidades del viento son independientes tanto dentro de un mismo día como entre días distintos.

(a) **[1.0 Ptos.]** Demuestre que X_j sigue una distribución Weibull$(\eta \cdot m^{-1/\beta}, \beta)$.

(b) **[2.0 Ptos.]** Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de velocidades mínimas registradas en n días. Asumiendo n, β y m son conocidos, demuestre que el estimador de máxima verosimilitud de η es

$$\hat{\eta} = \left(\frac{m}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^{\beta} \right)^{1/\beta}.$$

(c) **[2.0 Ptos.]** Obtenga la distribución asintótica del EMV de η indicado en b).

(d) **[1.0 Ptos.]** Obtenga la varianza aproximada de primer orden del EMV de η indicado en b).

Solución

(a) Sea $V_{j,1}, \ldots, V_{j,m}$ un conjunto de variables aleatorias independientes, cada una con distribución Weibull(η, β), cuya función de distribución acumulada es:

$$F_V(v) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{v}{\eta} \right)^{\beta} \right], \qquad v > 0.$$

El mínimo diario se define como $X_j = \text{mín}\{V_{j,1}, \ldots, V_{j,m}\}$. Del formulario se tiene que $F_{X_j}(x) = 1 - [1 - F_V(x)]^m$. Aplicando esta fórmula:

$$F_{X_j}(x) = 1 - [1 - F_V(x)]^m = 1 - \left[\exp\left(-\left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta} \right) \right]^m = 1 - \exp\left[-m \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta} \right].$$

Reescribiendo la expresión:

$$F_{X_j}(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta\, m^{-1/\beta}} \right)^{\beta} \right].$$

Por tanto,

$$X_j \sim \text{Weibull}(\eta\, m^{-1/\beta},\, \beta).$$

(b) Sabemos que $X_j \sim$ Weibull$(\eta\, m^{-1/\beta}, \beta)$, por lo que su función de densidad es:

$$f(x_j|\eta) = \frac{\beta}{\eta\, m^{-1/\beta}} \left(\frac{x_j}{\eta\, m^{-1/\beta}} \right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x_j}{\eta\, m^{-1/\beta}} \right)^{\beta} \right], \quad x_j > 0.$$

La verosimilitud conjunta para la muestra $X_1, \ldots, X_n$ es:

$$L(\eta) = \prod_{j=1}^{n} f(x_j|\eta) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\beta}{\eta\, m^{-1/\beta}} \left(\frac{x_j}{\eta\, m^{-1/\beta}} \right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x_j}{\eta\, m^{-1/\beta}} \right)^{\beta} \right].$$

Simplificando términos:

$$L(\eta) = \beta^n m^{n/\beta} \eta^{-\beta n} \left(\prod_{j=1}^{n} x_j^{\beta-1} \right) \exp\left[-m \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{\eta} \right)^{\beta} \right].$$

La log-verosimilitud es:

$$\ell(\eta) = n \log \beta + \frac{n}{\beta} \log m - \beta n \log \eta + (\beta - 1) \sum_{j=1}^{n} \log x_j - m \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x_j}{\eta} \right)^{\beta}.$$

Derivando respecto de η y haciendo cero:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \eta} = -\frac{\beta n}{\eta} + m\beta\, \eta^{-(\beta+1)} \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta} = 0.$$

Multiplicando por $\eta^{\beta+1}$:

$$m \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta} = n\, \eta^{\beta}.$$

Despejando:

$$\widehat{\eta} = \left(\frac{m}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta} \right)^{1/\beta} = \left(m\, \overline{X^{\beta}} \right)^{1/\beta}.$$

Se verifica que $\hat{\eta}$ es el EMV al derivar por segunda vez y reemplazar $\hat{\eta}$.

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta^2} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{\beta n}{\eta} + m\beta\, \eta^{-(\beta+1)} \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta} \right) = \frac{\beta n}{\eta^2} - m\beta(\beta+1) \eta^{-(\beta+2)} \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta}.$$

Evaluando en $\widehat{\eta}$, donde $m \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta} = n\, \widehat{\eta}^{\beta}$, se obtiene:

$$\left. \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta^2} \right|_{\widehat{\eta}} = \frac{\beta n}{\widehat{\eta}^2} - m\beta(\beta+1) \widehat{\eta}^{-(\beta+2)} \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta} = \frac{\beta n}{\widehat{\eta}^2} - \beta(\beta+1) n\, \widehat{\eta}^{-2}.$$

Simplificando:

$$\left. \frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta^2} \right|_{\widehat{\eta}} = -\,\beta^2 n\, \widehat{\eta}^{-2} < 0, \quad \forall\, \eta > 0.$$

Por lo tanto, la segunda derivada es siempre negativa, confirmando que $\widehat{\eta}$ corresponde a un máximo de la función de verosimilitud.

(c) Del formulario se tiene que $\sqrt{I_n(\eta)}(\hat{\eta} - \eta) \sim \text{Normal}(0, 1)$, donde $I_n(\eta)$ está dada en el formulario también. De este resultado se extrae que

$$\hat{\eta} \overset{\text{approx.}}{\sim} \text{Normal}\left(\eta, \sqrt{\frac{1}{I_n(\eta)}} \right)$$

Así, para obtener la distribución asintótica de $\hat{\eta}$ se debe calcular $I_n(\eta) = -\,\mathsf{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta^2} \right]$.

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta^2} = \frac{\beta n}{\eta^2} - m\beta(\beta+1)\eta^{-(\beta+2)} \sum_{j=1}^{n} x_j^{\beta}.$$

Por lo tanto,

$$I_n(\eta) = -\,\mathsf{E}\left[\frac{\partial^2 \ell}{\partial \eta^2}\right] = -\left[\frac{\beta n}{\eta^2} - m\beta(\beta+1)\eta^{-(\beta+2)} \sum_{j=1}^{n} \mathsf{E}\Big(x_j^{\beta}\Big)\right].$$

Del formulario se tiene que

$$\mathsf{E}(X_j^{\beta}) = (\eta\, m^{-1/\beta})^{\beta}\Gamma\left(1+\frac{\beta}{\beta}\right) = \eta^{\beta} m^{-1}\Gamma(2) = \frac{\eta^{\beta}}{m}.$$

Sustituyendo en la expresión de $I_n(\eta)$:

$$I_n(\eta) = -\left[\frac{\beta n}{\eta^2} - m\beta(\beta+1)\eta^{-(\beta+2)}\, n\, \frac{\eta^{\beta}}{m}\right] = -\left[\frac{\beta n}{\eta^2} - \frac{\beta(\beta+1)n}{\eta^2}\right] = \frac{n\beta^2}{\eta^2}.$$

Por lo tanto, la distribución asintótica de $\widehat{\eta}$ es:

$$\widehat{\eta} \overset{\text{approx.}}{\sim} \text{Normal}\left(\eta,\ \frac{\eta}{\beta\sqrt{n}}\right).$$

(d) Obtener la varianza de primer orden del EMV de η corresponde a aplicar el método delta para $\hat{\eta}$. Primero se nota que $\hat{\eta}$ es una función del promedio de X_j^{β}. Tras aplicar el teorema de cambio de variable para X_j^{β} se obtiene que $X_j^{\beta} \sim \text{Exp}\left(\frac{m}{\eta^{\beta}}\right)$. Luego, la media muestral cumple que $Y = \overline{X^{\beta}} \sim \text{Gamma}\left(n, \frac{m}{\eta^{\beta}}\right)$. De formulario se tiene que

$$\mathsf{E}(Y) = \frac{n}{\lambda n} = \frac{\eta^{\beta}}{m}, \qquad \text{Var}(Y) = \frac{1}{n\,\lambda^2} = \frac{\eta^{2\beta}}{n\,m^2}.$$

Por el método delta,

$$\text{Var}(\widehat{\eta}) \approx \text{Var}(Y)\left[\left.\frac{\partial g}{\partial Y}\right|_{Y=\mathsf{E}(Y)}\right]^2.$$

Calculamos la derivada:

$$\frac{\partial g}{\partial Y} = \frac{1}{\beta}(mY)^{1/\beta-1} m = \frac{m^{1/\beta}}{\beta}\, Y^{1/\beta-1}.$$

Evaluando en $Y = \mathsf{E}(Y) = \eta^{\beta}/m$:

$$\left.\frac{\partial g}{\partial Y}\right|_{Y=\mathsf{E}(Y)} = \frac{m^{1/\beta}}{\beta}\left(\frac{\eta^{\beta}}{m}\right)^{1/\beta-1} = \frac{\eta^{1-\beta}}{\beta}\, m.$$

Por tanto,

$$\text{Var}(\widehat{\eta}) \approx \frac{\eta^{2\beta}}{n\,m^2}\left(\frac{m\,\eta^{1-\beta}}{\beta}\right)^2 = \frac{\eta^2}{\beta^2\, n}.$$

lo cual coincide con la varianza obtenida mediante la información de Fisher.

Solución alternativa:

Una solución alternativa a este problema consiste en definir $\hat{\eta}$ como una función multivariada de $g(X_1, \ldots, X_n)$.

$$\hat{\eta} = g(X_1, \ldots, X_n) = \left(\frac{m}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^{\beta} \right)^{1/\beta},$$

donde $X_j \sim$ Weibull$(\eta \cdot m^{-1/\beta}, \beta)$. Como los $X_1, \ldots, X_n$ son independientes, entonces Corr$(X_i, X_j) = 0$. Así, por formulario:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\eta}) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\, \sigma_{X_i} \sigma_{X_j} \left[\frac{\partial g}{\partial X_i}(\mu_{X_1}, \ldots, \mu_{X_n}) \cdot \frac{\partial g}{\partial X_j}(\mu_{X_1}, \ldots, \mu_{X_n}) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sigma_{X_i}^2 \left[\frac{\partial g}{\partial X_i}(\mu_{X_1}, \ldots, \mu_{X_n}) \right]^2, \end{aligned}$$

ya que las variables son independientes y, por tanto, $\rho_{ij} = 0$ para $i \neq j$.
Calculamos la derivada parcial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial X_i} &= \frac{\partial}{\partial X_i} \left[\left(\frac{m}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^{\beta} \right)^{1/\beta} \right] \\ &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{m}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}-1} \cdot \frac{m}{n} \cdot \beta X_i^{\beta-1} \\ &= \frac{m}{n} \left(\frac{m}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}-1} X_i^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Como las variables $X_1, \ldots, X_n$ son i.i.d., se cumple que $\mu_{X_j} = \mu_X$ para todo j, por lo que:

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{X_j}^{\beta} = n\, \mu_X^{\beta}.$$

Evaluando la derivada en los valores esperados:

$$\left. \frac{\partial g}{\partial X_i} \right|_{X_j = \mu_X} = \frac{m}{n} \left(m\, \mu_X^{\beta} \right)^{\frac{1}{\beta}-1} \mu_X^{\beta-1} = \frac{m^{1/\beta}}{n}\, \mu_X^{\frac{1}{\beta}-1}.$$

Reemplazando en la expresión de la varianza:

$$\text{Var}(\hat{\eta}) \approx n\, \sigma_X^2 \left(\frac{m^{1/\beta}}{n}\, \mu_X^{\frac{1}{\beta}-1} \right)^2 = \frac{m^{2/\beta}\, \sigma_X^2}{n}\, \mu_X^{\frac{2}{\beta}-2}.$$

Dado que $X_j \sim$ Weibull$(\eta\, m^{-1/\beta}, \beta)$, sus momentos son:

$$\mu_X = \eta\, m^{-1/\beta}\, \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \qquad \sigma_X^2 = \eta^2\, m^{-2/\beta} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right].$$

Sustituyendo en la expresión de la varianza:

$$\text{Var}(\hat{\eta}) \approx \frac{m^{2/\beta}}{n}\left[\eta^2\, m^{-2/\beta}\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right)\right]\left[\eta\, m^{-1/\beta}\,\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^{\frac{2}{\beta}-2}.$$

Asignación de Puntaje:

(a)

Logro 1 [0.5 ptos]: por aplicar función de distribución acumulada del mínimo, $F_{X_1}(x) = 1-(1-F_V(x))^m$, o, equivalentemente, aplicar la función de densidad $f_{X_1}(x)$ dada en el formulario.
Logro 2 [0.5 ptos]: por verificar el resultado solicitado.

(b)

Logro 3 [0.5 ptos]: por definir la función de verosimilitud $L(\eta)$ o $\ell(\eta)$ a ser maximizada.

Logro 4 [0.5 ptos]: por derivar la función de verosimilitud e igualar a cero para maximizar.

Logro 5 [1.0 ptos]: por verificar el resultado solicitado.

- [0.5 pto] por verificar que $\hat{\eta}$ maximiza la verosimilitud a través de la segunda derivada.
- [0.5 pto] por concluir que $\hat{\eta}$ es el EMV.

(c)

Logro 6 [0.8 ptos]: por indicar que la distribución asintótica de $\hat{\eta}$ es Normal$(\eta, 1/I_n(\eta))$ citando el formulario.
Logro 7 [1.0 ptos]: por desarrollar $I_n(\eta)$.

- [0.5 pto] por obtener que E$(X_j^\beta) = \eta^\beta/m$.
- [0.5 pto] por desarrollo correcto de $I_n(\eta)$.

Logro 8 [0.2 ptos]: por concluir que la distribución asintótica de $\hat{\eta}$ es Normal$(\eta, \eta^2/(\beta^2 n))$ tras obtener que $I_n(\eta) = n\beta^2/\eta^2$.

(d)

Logro 9 [0.5 ptos]: por plantear expresiones del método Delta requeridas para encontrar la varianza de primer orden.

- Es decir, por indicar que Var$(\hat{\eta}) \approx$ Var$W(d/dW g(W))^2$ para algún W definido.

Logro 10 [0.5 ptos]: por desarrollar y obtener expresión para Var$(\hat{\eta})$.

- [0.3 pto] por desarrollo correcto.
- [0.2 pto] por conclusión.

Tiempo: 100 minutos