Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2025

Curso : Probabilidad y Estadística
Sigla : EYP1113
Profesores : Ricardo Aravena C., Maritza Márquez N., Bladimir Morales T., Ricardo Olea O., Jose Ordoñez C. y Hernán Robledo A.

PAUTA INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1

Durante el último tiempo, se han observado diversas decisiones del sistema judicial en causas penales que implican la aplicación de prisión preventiva (PP) o arresto domiciliario (AD), especialmente en casos de alta connotación pública.

Un análisis del comportamiento de juezas y jueces de primera instancia, junto con las resoluciones de la Corte de Apelaciones, sugiere que es posible modelar estas decisiones asignando probabilidades condicionales según el género del imputado y del juez que resuelve en primera instancia. Estas probabilidades se han estimado a partir del seguimiento de decisiones judiciales durante varios años.

Se sabe que el 40 % de los jueces de primera instancia son varones (y, por tanto, el 60 % son juezas), y que la asignación de un juez o jueza a una causa es independiente del genero del imputado.

- Si el imputado es varón y quien resuelve en primera instancia es una jueza, la probabilidad de dictar PP es 0.6. Este valor disminuye a 0.3 si la acusada es mujer.
- Si quien resuelve es un juez, la probabilidad de dictar PP en el caso de un imputado varón es 0.5, mientras que si la acusada es mujer, la probabilidad de PP baja a 0.4.

Independiente de la decisión tomada en primera instancia, las partes siempre apelan a la Corte de Apelaciones, buscando revertir la resolución (es decir, cambiar de PP a AD o viceversa).

Según los datos históricos del funcionamiento de la Corte de Apelaciones:

- En el caso imputado – jueza, la probabilidad de revertir la decisión es 0.6.
- En el caso imputada – jueza, esta probabilidad baja a 0.3.
- En el caso imputado – juez, la probabilidad de revertir la decisión es 0.3.
- En el caso imputada – juez, la probabilidad sube a 0.7.

Si se sabe que un imputado varón termina finalmente con prisión preventiva, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido una jueza quien dictó la resolución en primera instancia?

Solución

Dado que se consulta por un imputado varón, sólo es de interés construir un árbol de probabilidades para el caso varón.
Considere los siguientes eventos:

- PP: el imputado termina con prisión preventiva.

- J: la causa fue resuelta en primera instancia por un juez.
- R: la decisión es revertida.

Por el enunciado se posen las siguientes probabilidades:

- $P(J^c) = 0.6, \quad P(J) = 0.4$
- $P(PP \mid J^c) = 0.6, \quad P(PP^c \mid J^c) = 0.4$
- $P(R \mid J^c, PP) = 0.6, \quad P(R^c \mid J^c, PP) = 0.4$
- $P(R \mid J^c, PP^c) = 0.6, \quad P(R^c \mid J^c, PP^c) = 0.4$
- $P(PP \mid J) = 0.5, \quad P(PP^c \mid J) = 0.5$
- $P(R \mid J, PP) = 0.3, \quad P(R^c \mid J, PP) = 0.7$
- $P(R \mid J, PP^c) = 0.3, \quad P(R^c \mid J, PP^c) = 0.7$

Se solicita calcular $P(J^c \mid PP)$. Por Teorema de Bayes:

$$P(J^c \mid PP) = \frac{P(J^c \cap PP)}{P(PP)}$$

El numerador se calcula usando probabilidades totales y las probabilidades dadas en el enunciado.

$$\begin{aligned} P(J^c \cap PP) &= P(J^c \cap PP \cap R) + P(J^c \cap PP \cap R^c) \\ &= P(R^c \mid J^c, PP) \cdot P(PP \mid J^c) \cdot P(J^c) \\ &\quad + P(R \mid J^c, PP^c) \cdot P(PP^c \mid J^c) \cdot P(J^c) \\ &= (0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.4) + (0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6) \\ &= 0.288 \end{aligned}$$

El denominador se calcula utilizando el teorema de probabilidades totales, sumando todos los caminos que terminan en prisión preventiva:

$$\begin{aligned} P(PP) &= P(J^c \cap PP \cap R^c) + P(J^c \cap PP^c \cap R) + P(J \cap PP \cap R^c) + P(J \cap PP^c \cap R) \\ &= P(R^c \mid J^c, PP) \cdot P(PP \mid J^c) \cdot P(J^c) \\ &\quad + P(R \mid J^c, PP^c) \cdot P(PP^c \mid J^c) \cdot P(J^c) \\ &\quad + P(R^c \mid J, PP) \cdot P(PP \mid J) \cdot P(J) \\ &\quad + P(R \mid J, PP^c) \cdot P(PP^c \mid J) \cdot P(J) \\ &= (0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.6) + (0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6) + (0.7 \cdot 0.5 \cdot 0.4) + (0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.4) \\ &= 0.144 + 0.144 + 0.14 + 0.06 = 0.488 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$P(J^c \mid PP) = \frac{0.288}{0.488} = 0.59$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1 [2 ptos]: por definir eventos [0.5 ptos] y asociarlos a las probabilidades dadas en el enunciado [1.5 ptos].

- Asignar este puntaje si el estudiante hace un árbol de probabilidades.

Logro 2 [1 ptos]: por desarrollar $P(PP)$ [0.8 ptos] y obtener que $P(PP) = 0.488$ [0.2 ptos].

Logro 3 [1 ptos]: por desarrollar $P(J^c \cap PP)$ [0.8 ptos] y obtener que $P(J^c \cap PP) = 0.288$ [0.2 ptos].

Logro 4 [2 ptos]: por reconocer la probabilidad solicitada [1 ptos] y aplicar Teorema de Bayes para desarrollarla [0.5 ptos], y obtener que $P(J^c|PP) = 0.59$ [0.5 ptos].

Pregunta 2

Después del apagón eléctrico ocurrido en Chile el 25 de febrero de 2025, la empresa ISA InterChile implementó un protocolo de entrenamiento en subestaciones críticas para evitar futuras fallas. Como parte del protocolo, se simula una secuencia de fallas técnicas sobre 5 módulos de protección encadenados en serie.

Cuatro técnicos (A, B, C y D) son asignados de manera aleatoria a estos módulos, y por azar uno de ellos deberá atender un segundo módulo. ¿Cuál es la probabilidad de que los dos módulos a su cargo estén ubicados uno junto al otro?

Solución 1

Los casos totales los obtenemos asignando un técnico a los cinco módulos, luego otro a los cuatro restantes, y así hasta el cuarto en que se asignan dos.

$$\#\, S = \binom{5}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{2} = \frac{5!}{2!} = 60$$

Para sacar los casos favorables, se asignan tres módulos entre tres técnicos, y los dos restantes se asignan de una única manera al cuarto técnico. Como son cuatro técnicos se amplifica por cuatro para considerar que cualquiera puede recibir los dos módulos finales.

$$\#\, A = (3! \times 1) \times 4 = 24$$

Por lo tanto,

$$P(A) = \frac{3! \times 4}{5!/2!} = \frac{24}{60} = 0.4.$$

Solución 2

Para los casos totales, podemos usar el coeficiente multinomial para repartir cinco módulos en cuatro técnicos donde uno recibe dos. Dado que sí hay distinción de cuál técnico recibe dos módulos, se considera el total de maneras que podemos seleccionar a este técnico. De manera similar, se obtiene el número de casos favorables.

$$\#\, S = \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} \times \binom{4}{1} \qquad \#\, A = \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} \times \binom{4}{1} \times 4.$$

Por lo tanto

$$P(A) = \frac{3! \cdot 2!}{5!} \times 4 = 0.4.$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1 [2 ptos]: por obtener $\#\, S$ bajo un planteamiento correcto.

Logro 2 [2 ptos]: por obtener $\#\, A$ bajo un planteamiento correcto.

Logro 3 [2 ptos]: por obtener que P$(A) = 0.4$.

- Asignar [1 pto] por indicar P$(A) = \#A/\#S$.
- Asignar [1 pto] por obtener P$(A) = 0.4$ siempre y cuando $\#A$ y $\#S$ hayan sido planteados correctamente.

Pregunta 3

Suponga que las variaciones por minuto del precio del dólar observado en Chile, luego del anuncio de las políticas comerciales del gobierno de Donald Trump, siguen una distribución Normal(μ, σ).

Un monitoreo por minuto muestran que el dólar ha aumentado más de 6.5 pesos el $57\,\%$ de las veces y caído más de 4 pesos el $14\,\%$.

(a) **[2.0 Ptos.]** ¿Cuales serían los valores de μ y σ en base al monitoreo realizado?

(b) **[2.0 Ptos.]** ¿Cuál es el menor incremento, por minuto, del 5 % superior según el modelo ajustado en (a)?

(c) **[2.0 Ptos.]** Si usted acaba de comprar un dólar a mil pesos y logra venderlo al siguiente minuto, ¿cuál es la probabilidad que gane más de un 2 % de lo que pago por el dólar?

Solución

(a) Sea X la variable aleatoria con distribución Normal(μ, σ) que representa las variaciones por minuto del precio del dólar observado en Chile. Del enunciado se tiene que

$$P(X > 6.5) = 0.57 \quad \Rightarrow \quad P(X < 6.5) = 0.43$$
$$P(X < -4) = 0.14$$

Utilizamos estos datos para obtener los valores de μ y σ.

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{-4-\mu}{\sigma}\right) = 0.14 \quad \Rightarrow \quad \frac{-4-\mu}{\sigma} = z_{0.14}$$

Buscando en la tabla de percentiles de la distribución normal del formulario se obtiene que $z_{0.14} = \Phi^{-1}(0.14) \approx -1.08$. Así,

$$\frac{-4-\mu}{\sigma} = -1.08 \quad \Rightarrow \quad -4-\mu = -1.08\sigma \quad \Rightarrow \quad \mu = -4 + 1.08\sigma$$

También, usando $P(X < 6.5) = 0.43$, tenemos:

$$\frac{6.5-\mu}{\sigma} = z_{0.43} \quad \Rightarrow \quad z_{0.43} \approx -0.18 \quad \Rightarrow \quad 6.5-\mu = -0.18\sigma \quad \Rightarrow \quad \mu = 6.5 + 0.18\sigma$$

Igualamos ambas expresiones para μ:

$$-4 + 1.08\sigma = 6.5 + 0.18\sigma \quad \Rightarrow \quad 0.90\sigma = 10.5 \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{10.5}{0.90} = 11.67$$

Reemplazamos en cualquiera de las expresiones para obtener μ:

$$\mu = 6.5 + 0.18 \cdot 11.67 \approx 6.5 + 2.1006 \approx 8.60$$

Entonces, los parámetros son:

$$\mu = 8.60, \quad \sigma = 11.67$$

(b) Buscamos el valor x tal que $P(X > x) = 0.05$.

$$0.05 = P(X > x) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Aplicando la ley de complemento:

$$P\left(Z < \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = 0.95 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.95) = z_{0.95} \approx 1.65$$

Finalmente, despejamos x:

$$x = \mu + 1.65\sigma = 8.60 + 1.65 \cdot 11.67 \approx 8.60 + 19.2555 \approx 27.86$$

(c) Ganar más de un 2 % de la inversión significa que el precio debe subir a al menos $1000 \cdot 1.02 = 1020$, es decir, subir 20 pesos.

Buscamos:

$$P(X > 20) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{20-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{20-8.60}{11.67}\right) = P(Z > 0.976)$$

Buscando en la tabla:

$$P(Z > 0.976) = 1 - \Phi(0.976) \approx 1 - 0.834 = 0.166$$

Entonces, la probabilidad de ganar más de un 2 % en un minuto es aproximadamente 0.166.

Asignación de Puntaje:

a)
Logro 1 [1 ptos]: por reconocer correctamente la información del enunciado como $P(X > 6.5)$ [0.5 ptos] y $P(X < -4)$ [0.5 ptos].

Logro 2 [1 ptos]: por plantear un sistema de ecuaciones para obtener μ y σ.

- [0.5 ptos] por utilizar propiedad de percentiles de la distribución normal para obtener expresión para μ y σ.
- [0.3 ptos] por obtener el sistema de ecuaciones y resolverlo.
- [0.2 ptos] por obtener que $\mu = 8.60$ y $\sigma = 11.67$.

b)

Logro 3 [1 ptos]: por reconocer que se busca el valor de x tal que $P(X > x) = 0.05$.

Logro 4 [1 ptos]: por utilizar propiedades de la distribución normal para obtener lo solicitado.

- [0.5 ptos] por obtener $(x - \mu)/\sigma = 1.65$.
- [0.5 ptos] por obtener que $x = 27.86$.

c)

Logro 5 [1 ptos]: por reconocer que se busca $P(X > 20)$.

Logro 6 [1 ptos]: por utilizar propiedades de la distribución normal para obtener lo solicitado.

- [0.5 ptos] por el desarrollo para obtener $P(Z > 0.976)$.
- [0.5 ptos] por obtener $P(Z > 0.976) = 0.166$.

Pregunta 4

En el análisis de calidad del aire o en estudios de vida útil de materiales expuestos al ambiente, es común que las variables involucradas no sigan distribuciones estándar. Supongamos que la variable aleatoria X representa la concentración de partículas finas (PM2.5) acumuladas sobre una superficie constructiva durante un proceso de monitoreo, medida entre 0 y 1.

La función de densidad, $f_X(x)$, se comporta de manera distinta según el nivel de exposición, con una mayor variabilidad en los primeros tramos (posiblemente asociados a condiciones atmosféricas inestables) y un comportamiento más constante en valores más altos.

$$f_X(x) = \begin{cases} k\,(1+x), & 0 \le x \le 1/2 \\ \dfrac{2}{3}, & 1/2 < x \le 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) **[2.0 Ptos.]** Determine el valor de k.

(b) **[2.0 Ptos.]** Calcule la mediana de X.

(c) **[2.0 Ptos.]** Determine el coeficiente de variación de X.

Solución

(a) Determinamos el valor de k a partir de la condición de que una función de densidad debe integrar 1 en su dominio.

$$\int_0^1 f_X(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^{1/2} k(1+x)\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{2}{3}\,dx = 1$$

$$= k\left[x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = k\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{3} = k \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\Rightarrow k \cdot \frac{5}{8} = \frac{2}{3} \Rightarrow k = \frac{16}{15}$$

(b) Para encontrar la mediana m tal que $\mathrm{P}(X \le m) = 0.5$, usamos la función de distribución acumulada. Observamos que $\int_{1/2}^1 f(x)dx = 1/3$, por lo que la mediana debe ser un valor x tal que $x \in [0, 1/2]$.

$$F_X(x) = \int_0^x k(1+t)\,dt = k\left[t + \frac{t^2}{2}\right]_0^x = k\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$$

Sustituimos $k = 16/15$ y planteamos la ecuación:

$$\frac{16}{15}\left(m + \frac{m^2}{2}\right) = 0.5 \quad \Rightarrow \quad m + \frac{m^2}{2} = \frac{15}{32} \quad \Rightarrow \quad 16m^2 + 32m - 15 = 0$$

Usamos la fórmula cuadrática:

$$m = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 + 4 \cdot 16 \cdot 15}}{2 \cdot 16} = \frac{-32 \pm \sqrt{1984}}{32} \approx 0.3925,$$

donde la raíz negativa para m fue omitida por estar fuera del soporte.

(c) El coeficiente de variación corresponde a $\delta = \sigma/\mu = \sqrt{\text{Var}(X)}/\text{E}(X)$. Calculamos $\text{E}(X)$:

$$\text{E}(X) = \int_0^{1/2} x \cdot k(1+x)\,dx + \int_{1/2}^{1} x \cdot \frac{2}{3}\,dx$$

$$= k\int_0^{1/2} x(1+x)\,dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x\,dx = k\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_0^{1/2} + \frac{2}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/2}^{1}$$

$$= k\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = \frac{16}{15}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{16}{90} + \frac{6}{24} = 0.4277$$

Ahora, para calcular la varianza necesitamos también $\text{E}(X^2)$:

$$\begin{aligned}
\text{E}(X^2) &= \int_0^{1/2} x^2 \cdot k(1+x)\,dx + \int_{1/2}^{1} x^2 \cdot \frac{2}{3}\,dx \\
&= k\int_0^{1/2} x^2(1+x)\,dx + \frac{2}{3}\int_{1/2}^{1} x^2\,dx \\
&= k\int_0^{1/2} (x^2+x^3)\,dx + \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} \\
&= k\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^{1/2} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right) \\
&= k\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{64}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{24} \\
&= \frac{11}{180} + \frac{7}{36} = \frac{23}{90} = 0.255556
\end{aligned}$$

Entonces, la varianza es:

$$\text{Var}(X) = \text{E}(X^2) - [\text{E}(X)]^2 \approx 0.255556 - (0.4277)^2 = 0.07262871$$

Y el coeficiente de variación:

$$\delta = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{0.07262871}}{0.4277} \approx \frac{0.2694971}{0.4277} \approx 0.6301079$$

Asignación de Puntaje:

a)

Logro 1 [1 ptos]: 1 pto por indicar que se debe cumplir $\int f(x)dx = 1$.

Logro 2 [1 ptos]: por obtener que $k = 16/15$.

- [0.5 ptos] por integrar correctamente.
- [0.5 ptos] obtener $k = 16/15$.

b)

Logro 3 [0.5 ptos]: por indicar que se debe obtener m tal que $P(X \leq m) = 0.5$ o $P(X < m) = 0.5$ o una expresión equivalente.
Logro 4 [1.5 ptos]: por obtener que $m = 0.3925$.

- [0.5 ptos] por obtener $F(x)$.

- [0.5 ptos] por los desarrollos de despeje de m en la igualdad $F(m) = 0.5$.
- [0.5 ptos] obtener $m = 0.3925$.

c)

Logro 5 [1.5 pto]: por calcular correctamente $\mathsf{E}(X) = 0.4277$ y $\sigma = \sqrt{\mathsf{Var}(X)} = 0.2694971$.

- [0.5 ptos] por desarrollos y obtener $\mathsf{E}(X) = 0.4277$.
- [0.5 ptos] por desarrollos y obtener $\mathsf{E}(X^2) = 0.255556$.
- [0.5 ptos] por desarrollos y obtener $\sigma = 0.2694971$.

Logro 6 [0.5 ptos]: por obtener $\delta = 0.6301079$.

No se asigna puntaje por indicar $\delta = \sigma/\mu$ por ser parte del formulario.