Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2025

Curso	:	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	:	**EYP1113**
Profesores	:	**Ricardo Aravena, Maritza Márquez , Bladimir Morales , Mauricio Toro, Ricardo Olea, Jose Ordoñez, Felipe Ossa, Nixón Jerez, Daniel Saavedra, Cristian Capetillo y Hernán Robledo**

INTERROGACIÓN 1

Pregunta 1

Una empresa de investigación de opinión pública realiza, semana a semana, encuestas telefónicas para recoger la opinión de la población sobre ciertos fenómenos, seleccionando para ello una muestra de dicha población. La empresa indica que la tasa promedio de respuesta (personas que contestan la llamada) es de 9.75 %.

La selección de la muestra se realiza de manera estratificada (es decir, separando en grupos) a partir de un panel de personas conformado en los últimos años. Esta estratificación considera tres grupos etarios: Jóvenes (30 %), Adultos (50 %) y Adultos mayores (20 %). Además, dentro de cada grupo etario la distribución por sexo es la siguiente: 60 % de mujeres en Jóvenes, 70 % en Adultos y 40 % en Adultos mayores (debido al menor nivel de digitalización en este último segmento).

En cuanto a la tasa de respuesta, las estadísticas de la empresa muestran que responden las llamadas el 10 % de las mujeres adultas; además, independientemente del sexo, lo hace el 5 % de los jóvenes y el 20 % de los adultos mayores.

(a) **[3.0 Ptos.]** Cuando la empresa llama a una persona, ¿cuál es la probabilidad de que un hombre adulto responda la llamada?

(b) **[3.0 Ptos.]** Dado que una persona responde la llamada, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución

(a) (SOLUCIÓN 1)

Considere los siguientes eventos:

- R: la persona responde la llamada.
- H: la persona es hombre.
- G_1: la persona pertenece al grupo etario Joven.
- G_2: la persona pertenece al grupo etario Adulto.
- G_3: la persona pertenece al grupo etario Adulto Mayor.

En base a los eventos, se pide calcular $P(R \mid G_2 \cap H)$. A través del teorema de probabilidades totales podemos descomponer $P(R)$ como sigue

$$0.0975 = P(R) = P(R|G_1) \cdot P(G_1) + P(R|G_2) \cdot P(G_2) + P(R|G_3) \cdot P(G_3) \tag{1}$$

Las siguientes cantidades están dadas en el enunciado:

- $P(R|G_1) \cdot P(G_1) = 0.05 \cdot 0.3 = 0.015$
- $P(R|G_3) \cdot P(G_3) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$
- $P(G_2) = 0.5$.

Para calcular $P(R|G_2)$, utilizamos nuevamente el teorema de probabilidades totales.

$$\begin{aligned} P(R|G_2) &= P(R|G_2 \cap H)P(H|G_2) + P(R|G_2 \cap H^c)P(H^c|G_2) \\ &= P(R|G_2 \cap H) \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.7 \end{aligned}$$

Reemplazando en (1), despejamos $P(R|G_2 \cap H)$ para obtener el valor buscado.

$$\begin{aligned} 0.0975 &= P(R|G_1) \cdot P(G_1) + P(R|G_2) \cdot P(G_2) + P(R|G_3) \cdot P(G_3) \\ &= 0.015 + [P(R|G_2 \cap H) \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.7] \cdot 0.5 + 0.04 \\ &= 0.015 + P(R|G_2 \cap H) \cdot 0.15 + 0.035 + 0.04 \\ \implies \qquad P(R|G_2 \cap H) &= \frac{0.0975 - 0.015 - 0.035 - 0.04}{0.15} = 0.05 \end{aligned}$$

(a) (SOLUCIÓN 2)

Considerando los mismos eventos de la solución anterior, se pide calcular $P(R \cap G_2 \cap H)$. Tras dos aplicaciones de la definición de probabilidad condicional se tiene que

$$P(R \cap G_2 \cap H) = P(R|G_2 \cap H)P(H|G_2)P(G_2) = P(R|G_2 \cap H) \cdot 0.3 \cdot 0.5. \tag{2}$$

Por lo tanto, se debe obtener el valor de $P(R|G_2 \cap H)$, lo cual se obtiene a través de la solución anterior. Tras obtener que $P(R|G_2 \cap H) = 0.05$, reemplazamos en (2) para obtener el resultado.

$$P(R \cap G_2 \cap H) = 0.05 \cdot 0.3 \cdot 0.5 = 0.0075$$

(b)

Considerando la misma definición de eventos del ítem (a), se solicita calcular $P(H^c|R)$. Por Teorema de Bayes, y reemplazando por las probabilidades dadas en el enunciado, obtenemos

$$P(H^c|R) = \frac{P(R|H^c)P(H^c)}{P(R)} = \frac{P(R|H^c)P(H^c)}{0.0975} \tag{3}$$

Para calcular $P(R|H^c)$ utilizamos el teorema de probabilidades totales condicionando por los grupos etarios.

$$\begin{aligned} P(R|H^c) &= P(R \cap G_1|H^c) + P(R \cap G_2|H^c) + P(R \cap G_3|H^c) \\ &= P(R|G_1 \cap H^c)P(G_1|H^c) + P(R|G_2 \cap H^c)P(G_2|H^c) + P(R|G_3 \cap H^c)P(G_3|H^c) \\ &= P(R|G_1)P(G_1|H^c) + P(R|G_2 \cap H^c)P(G_2|H^c) + P(R|G_3)P(G_3|H^c) \quad \text{(Indep. del sexo en } G_1 \text{ y } G_3) \\ &= 0.05 \cdot P(G_1|H^c) + 0.1 \cdot P(G_2|H^c) + 0.2 \cdot P(G_3|H^c) \end{aligned}$$

Por Teorema de Bayes, $P(G_k|H^c) = [P(H^c|G_k)P(G_k)]\,/P(H^c)$, por lo que $P(H^c)$ se simplificará al reemplazar en la ecuación (3). Así, reemplazando en (3) se obtiene el valor solicitado:

$$
\begin{aligned}
P(H^c|R) &= \frac{P(R|H^c)P(H^c)}{0.0975} \\
&= \frac{1}{0.0975}\Big[0.05 \cdot P(H^c|G_1)P(G_1) + 0.1 \cdot P(H^c|G_2)P(G_2) + 0.2 \cdot P(H^c|G_3)P(G_3)\Big] \\
&= \frac{1}{0.0975}\Big[0.05 \cdot 0.6 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.7 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.2\Big] \\
&= 0.6153
\end{aligned}
$$

Asignación de Puntaje:

(a)

Logro 1 [0.4 ptos]: por definir los eventos y asociarles las probabilidades dadas en el enunciado correctamente.

Logro 2 [0.5 ptos]: por identificar la probabilidad solicitada, $P(R|G_2 \cap H)$ o $P(R \cap G_2 \cap H)$. Notar que se considerarán ambas especificaciones como respuestas correctas.

Logro 3 [1.0 ptos]: Por usar el Teorema de Probabilidades Totales [0.5 ptos] para expandir $P(R)$ según los grupos etarios [0.5 ptos].

Logro 4 [1.0 ptos]: Por usar el Teorema de Probabilidades Totales [0.5 ptos] para desarrollar $P(R|G_2)$ según el sexo de las personas.

Los Logros 1, 2 y 3 pueden ser asignados si el/la estudiante dibuja árboles de probabilidad correctamente, y se observa con claridad que el teorema de probabilidades totales se esté empleando para obtener las cantidades requeridas.

Logro 5 [0.1 ptos]: Por obtener la respuesta correcta:

- $P(R|G_2 \cap H) = 0.05$ si estudiante indica que se solicita $P(R|G_2 \cap H)$.
- $P(R \cap G_2 \cap H) = 0.0075$ si estudiante indica que se solicita $P(R \cap G_2 \cap H)$.

(b)

(Logro 5 es el mismo que el Logro 1.)

Logro 6 [0.4 ptos]: por definir los eventos y asociarles las probabilidades dadas en el enunciado correctamente.

Logro 7 [1.0 ptos]: por identificar la probabilidad solicitada, $P(H^c|R)$ [0.5 ptos], y desarrollarla con Teorema de Bayes [0.5 ptos].

Logro 8 [1.0 ptos]: por aplicar el Teorema de Probabilidades Totales para calcular $P(R|H^c)$ condicionando por los grupos etarios.

- Asignar este puntaje si se utiliza un árbol de probabilidades para este fin.

Logro 9 [0.5 ptos] por usar Teorema de Bayes para calcular $P(G_k|H^c)$ para $k = 1, 2, 3$.

Logro 10 [0.1 ptos]: por obtener que $P(H^c|R) = 0.6153$.

Pregunta 2

Considere un cajón con $N = 20$ duraznos, donde se sabe que hay $m = 6$ infectados por cierta plaga. El aspecto de un durazno no cambia ante la presencia de esta infección, así que asuma que todos los duraznos se ven iguales. Suponga que se extraen duraznos al azar de este cajón, sin remplazo, hasta que se encuentre uno de estos duraznos infectados.

(a) **[3.0 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad exacta de que al extraer el cuarto durazno se encuentre recién el primer durazno infectado? Es decir, que en cuatro extracciones se hayan sacado 3 duraznos sanos y el último es infectado.

En adelante suponga ahora que se realiza el mismo experimento, pero ahora cualquier durazno extraído y observado se devuelve al cajón, y se repite hasta encontrar un durazno infectado. Bajo este esquema, la probabilidad de encontrar el primer durazno en la x-ésima extracción, está dada por la fórmula,

$$P(X = x) = \frac{6}{20} \cdot \left(1 - \frac{6}{20}\right)^{x-1} \quad , \quad x = 1, 2, \ldots$$

donde X representa el número de extracciones de duraznos hasta encontrar el primer infectado.

(b) **[1.0 Ptos.]** Encuentre la probabilidad de encontrar el primer durazno infectado en a lo más 2 extracciones.

(c) **[1.0 Ptos.]** ¿Cuántas extracciones se espera realizar hasta encontrar un durazno infectado? La respuesta debe usar solo contenidos vistos en el curso hasta la fecha.

(d) **[1.0 Ptos.]** Encuentre la mediana del número de extracciones hasta encontrar el primer durazno infectado. *(Nota: en una distribución discreta, la mediana corresponde a un valor x_m tal que $P(X \leq x_m) \geq 0.5$ y $P(X \geq x_m) \geq 0.5$, simultáneamente)*.

Solución

(a)

Alterantiva 1:
Sea A el conjunto de todas las posibles extracciones en que se sacan 3 duraznos sanos y un último infectado, y S el el espacio muestral de todas las secuencias de cuatro extracciones. Se pide $P(A) = \#A/\#S$.
$\#S$ se calcula como una permutación sin reemplazo, pues corresponde al número de maneras de seleccionar 4 ítems de un total de 20 sin importar el orden. Así,

$$\#S = \frac{20!}{(20-4)!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116.280$$

Por otra parte, para calcular $\#A$ extraemos primero 3 de los 14 duraznos no infectados sin importar el orden, y luego seleccionamos uno de los 6 duraznos infectados. Es decir,

$$\#A = \left(\frac{14!}{(14-3)!}\right) \cdot \left(\frac{6!}{(6-1)!}\right) = 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 6 = 13.104$$

Así, la probabilidad pedida es

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{13.104}{116.280} = 0.1127$$

Alterantiva 2:
Esta alternativa es similar a la alternativa 1, pero argumentando de un punto de vista combinatorial. Utilizar combinaciones de duraznos extraidos como resultados posibles no es consistente con el cálculo de esta probabilidad, puesto que el evento A buscado es un *permutación específica* del evento $B = \{\text{Se extraen 3 duraznos sanos y 1 infectado}\}$, sino

$$A = \{\text{Se extraen 3 duraznos sanos primero, y uno infectado por último}\} \ .$$

En otras palabras, la probabilidad

$$P(B) = \frac{\binom{14}{3} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{20}{4}} = 0.4508$$

no corresponde a lo pedido. En cambio se deben contar permutaciones, amplificando el total de resultados posibles en

$$\#S = \binom{20}{4} \cdot 4! = 116,280$$

y la cantidad de resultados en el evento A se multiplica por $3!\,1!$, representando los diferentes ordenamientos de los tres duraznos sanos en los primeros tres lugares, y el durazno infectado en el cuarto lugar (este último factor es claramente redundante),

$$\#A = \binom{14}{3} \cdot \binom{6}{1} \cdot 3! = 13,104\ .$$

Finalmente, la probabilidad pedida es

$$P(A) = \frac{\binom{14}{3} \cdot \binom{6}{1} \cdot 3!}{\binom{20}{4} \cdot 4!} = 0.1127\ .$$

Alterantiva 3:
Los duraznos infectados pueden ser revisados en 20 posiciones diferentes. Cada conjunto de 6 posiciones de un total de 20 son equiprobables, y la cantidad total equivale a

$$\#S = \binom{20}{6} = 38,760$$

mientras que el evento buscado A corresponde a todos los conjuntos de tamaño 6 que tengan el 4 y no tengan el 1, 2 ni 3,

$$\#A = \binom{3}{0}\binom{1}{1} \cdot \binom{16}{5} = 4,368\ .$$

Finalmente,

$$P(A) = \frac{\#A}{\#S} = \frac{4,368}{38,760} = 0.1127\ .$$

Alterantiva 4:
Se puede establecer una secuencia de eventos

- A_1: Extraer un durazno sano en la primera extracción
- A_2: Extraer un durazno sano en la segunda extracción
- A_3: Extraer un durazno sano en la tercera extracción
- A_4: Extraer un durazno infectado en la cuarta extracción.

En primer lugar,

$$P(A_1) = \frac{14}{20}\ .$$

Las probabilidades concicionales de cada evento A_j, condicionado a los $\{A_i\ :\ i < j\}$, se pueden calcular,

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{13}{19}$$
$$P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) = \frac{12}{18}$$
$$P(A_4 \mid A_3 \cap A_2 \cap A_1) = \frac{6}{17}$$

Finalmente, el evento buscado es $A := A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$. Por la regla multiplicativa,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_4 \mid A_3 \cap A_2 \cap A_1)\, P(A_3 \mid A_2 \cap A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_1) \\ &= \frac{6}{17} \cdot \frac{12}{18} \cdot \frac{13}{19} \cdot \frac{14}{20} \\ &= 0.1127\ . \end{aligned}$$

(b)

Se pide $P(X \leq 2)$.

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} \cdot \left(1 - \frac{6}{20}\right) = 0.51$$

(c)

Se solicita calcular el valor esperado de X, $\mathbb{E}(X)$, el cual se calcula como

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \cdot \frac{6}{20} \cdot \left(\frac{14}{20}\right)^{x-1}$$

Para calcular esta serie, utilizamos la expresión dada en formulario, para $k = 1$,

$$\sum_{x=0}^{\infty} (x+1) \cdot \phi^x = \frac{1}{(1-\phi)^2}.$$

Así,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{6}{20} \sum_{y=0}^{\infty} (y+1) \cdot \left(\frac{14}{20}\right)^y = \frac{6}{20} \cdot \frac{1}{(6/20)^2} = \frac{20}{6} = 3.333$$

Por lo que se esperan 3.333 extracciones de duraznos hasta encontrar un infectado.

(d)

Se pide encontrar el valor x_m tal que $P(X \leq x_m) \geq 0.5$ y $P(X \geq x_m) \geq 0.5$, simultáneamente.
Una opción es obtener una expresión para $P(X \geq x_m)$ para encontrar el valor de x_m.

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= \sum_{x=1}^{k} P(X = x) \\ &= \sum_{x=1}^{k} \frac{6}{20} \cdot \left(1 - \frac{6}{20}\right)^{x-1} = \frac{3}{10} \sum_{x=1}^{k} \left(\frac{7}{10}\right)^{x-1} \\ &= \frac{3}{10} \sum_{x=0}^{k-1} \left(\frac{7}{10}\right)^{x} = \frac{3}{10} \frac{(1 - (7/10)^k)}{(1 - 7/10)} \\ &= 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^{k}, k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Así,

- $P(X \leq 1) = 3/10$
- $P(X \leq 2) = 1 - 49/100 = 0.51$
- $P(X \leq 3) = 1 - 343/1000 = 0.657$

Por otra parte,

- $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - 0 = 1$
- $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 7/10$
- $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 0.49$

De lo anterior, notamos que si $x_m = 2$ se cumplen las condiciones dadas en el enunciado, por lo que $x_m = 2$ es la mediana del número de extracciones hasta encontrar el primer durazno.

Una solución equivalente es calcular cada $P(X \leq 1) = P(X = 1)$, $P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$ para llegar a la misma conclusión.

Asignación de Puntaje:

(a) Asignación de puntaje considerando Alternativa 1.

Logro 1 [1 ptos]: por obtener $\# S$ bajo un planteamiento correcto.

Logro 2 [1 ptos]: por obtener $\# A$ bajo un planteamiento correcto.

Logro 3 [1 ptos]: por obtener que P$(A) = 0.1127$.

- Asignar [0.5 pto] por indicar P$(A) = \#A/\#S$.
- Asignar [0.5 pto] por obtener P$(A) = 0.1127$ siempre y cuando $\#A$ y $\#S$ hayan sido planteados correctamente.

(b)

Logro 4 [1.0 ptos]: por identificar la probabilidad solicitada [0.4 ptos], por desarrollar $P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$ [0.4 ptos], y obtener el valor correcto, $P(X \leq 2) = 0.51$ [0.2 ptos].

(c)

Logro 5 [1.0 ptos]: por identificar que se solicita el valor esperado de X [0.4 ptos], por desarrollar la serie con resultados del formulario [0.4 ptos], y obtener el valor correcto, $\mathbb{E}(X) = 3.333$ [0.2 ptos].

(d)

Logro 6 [1.0 ptos]: por obtener los valores de $P(X \leq x)$ y $P(X \geq x)$ para $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$ [0.9 ptos] y verificar que para $x = 2$ se cumple la condición de mediana [0.1 ptos].

Pregunta 3

La dendrocronología es la ciencia que estudia los anillos de crecimiento de los árboles para obtener información sobre el pasado. Cada año, los árboles producen un anillo cuyo grosor refleja las condiciones ambientales: en años húmedos y templados los anillos suelen ser más anchos, mientras que en años secos o fríos son más estrechos. De esta manera, los anillos permiten reconstruir series históricas de clima (temperatura, precipitaciones, sequías e incluso eventos extremos como erupciones volcánicas).

El World Data Service for Paleoclimatology gestiona el Banco Internacional de Datos de Anillos de Árboles, ITRDB[1], que es el archivo público más grande del mundo con datos dendrocronológicos.

El ITRDB reporta anchos de anillos en bruto, densidad de la madera, mediciones de isótopos y cronologías del índice de crecimiento para más de 5.000 sitios en seis continentes. A partir de esta información, investigadores han estimado series históricas de temperatura media invernal y precipitación anual en el sur de Chile durante los últimos 200 años.

Los resultados muestran lo siguiente:

- La temperatura media invernal (°C) presenta un comportamiento aproximadamente simétrico:
  - Media = 7.5 grados
  - IQR = 3.5 grados
- La precipitación anual (mm) presenta asimetría positiva:
  - Mediana = 850 mm
  - Percentil 25 % = 700 mm

Suponiendo que las temperaturas medias invernales siguen una distribución Normal y las precipitaciones anuales una distribución Log-Normal responda:

(a) **[1.5 Ptos.]** ¿Cuál es la temperatura invernal mínima correspondiente al 10 % superior de estas?

(b) **[1.5 Ptos.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un invierno histórico haya tenido una temperatura media inferior a 6 °C?

(c) **[1.5 Ptos.]** Calcule el IQR de las precipitaciones anuales.

(d) **[1.5 Ptos.]** Calcule el coeficiente de asimetría de las precipitaciones anuales.

Solución

Asignación de Puntaje:

(a)

Sea X la variable aleatoria que representa la temperatura media invernal, donde $X \sim$ Normal(μ, σ). De los datos dados del enunciado se tiene que $\mu = 7.5$. Para obtener σ se utiliza que el IQR = 3.5.
El percentil x_p de la distribución normal está dado como sigue

$$p = P\left(X \leq x_p\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x_p-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{x_p-\mu}{\sigma}\right) \quad \Longrightarrow \quad x_p = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p)$$

Así, IQR $= x_{0.75} - x_{0.25} = \left(\mu + \sigma\Phi^{-1}(0.75)\right) - \left(\mu + \sigma\Phi^{-1}(0.25)\right) = \sigma\left(\Phi^{-1}(0.75) - \Phi^{-1}(0.25)\right)$. Utilizando la tabla de percentiles de la distribución normal del formulario, tenemos que $\Phi^{-1}(0.75) = 0.67$ y $\Phi^{-1}(0.25) = -\Phi^{-1}(0.25) = -0.67$.

[1] `https://www.ncei.noaa.gov/products/paleoclimatology/tree-ring`

Despejamos σ para obtener el valor de este.

$$\sigma = \frac{\text{IQR}}{(\Phi^{-1}(0.75) - \Phi^{-1}(0.25))} = \frac{3.5}{0.67 + 0.67} = 2.611$$

Si el/la estudiante usa que $\Phi^{-1}(0.75) = 0.68$, se tiene que $\sigma = 2.573$, lo cual también se considera correcto.
Se pide el valor x tal que $P(X \geq x) = 0.1$, lo cual corresponde al percentil 90 %. Utilizando la fórmula de percentil derivada, se tiene que la temperatura invernal solicitada es $x = \mu + \sigma\Phi^{-1}(0.9) = 7.5 + 2.611 \cdot 1.28 = 10.842$.

Si el/la estudiante usa $\sigma = 2.573$, la respuesta es $x = 10.793$, lo que se considera correcto.

(b)

Se pide calcular $P(X < 6)$.

$$\begin{aligned} P(X < 6) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{6 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z < \frac{6 - 7.5}{2.611}\right) = P\left(Z < -0.5744\right) \approx \Phi(-0.57) \\ &= 1 - \Phi(0.57) = 1 - 0.7157 \\ &= 0.2843 \end{aligned}$$

Si el/la estudiante usa $\sigma = 2.573$, la respuesta es $P(X < 6) = P(Z < -0.582) \approx 1 - \Phi(0.58) = 0.281$, lo cual también es correcto.

(c)

Sea Y la variable aleatoria que representa los milímetros de precipitaciones anuales, con $Y \sim$ LogNormal(λ, ζ). Para calcular los parámetros de la distribución y el IQR se necesita una expresión para los percentiles. Como $Y \sim$ LogNormal(λ, ζ), entonces $\log(Y) \sim$ Normal(λ, ζ). Usando esta propiedad, si y_p es el percentil p de la distribución LogNormal,

$$p = P\left(Y < y_p\right) = P\left(\log(Y) < \log(y_p)\right)$$

Como $\log(Y) \sim$ Normal(λ, ζ), entonces $\log(y_p) = \lambda + \zeta\Phi^{-1}(p)$, por lo que

$$y_p = \exp\left(\lambda + \zeta\Phi^{-1}(p)\right)$$

Con los datos del enunciado, $850 = y_{0.5} = e^{\lambda}$, por lo que $\lambda = \log(850) = 6.745$. Por otra parte,

$$700 = y_{0.25} = \exp\left(\log(850) + \zeta \cdot \Phi^{-1}(0.25)\right) = \exp\left(\log(850) - 0.67 \cdot \zeta\right)$$

Despejando, se obtiene que $\zeta = (\log(850) - \log(700))/0.67 = 0.2897$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \text{IQR} &= x_{0.75} - x_{0.25} \\ &= \exp\left(\lambda + \zeta\Phi^{-1}(75)\right) - \exp\left(\lambda + \zeta\Phi^{-1}(25)\right) \\ &= \exp\left(\log(850) + 0.2897 \cdot 0.67\right) - \exp\left(\log(850) - 0.2897 \cdot 0.67\right) \\ &= 1030.7 - 700.9 = 329.8. \end{aligned}$$

(d)

El coeficiente de asimetría, según formulario, es $\theta_X = \mathbb{E}\left[(Y-\mu_Y)^3\right]/\sigma_Y^3$, donde $\sigma_Y^3 = \text{Var}(Y)^{3/2}$ y la varianza está dada por formulario.

Expandimos $\mathbb{E}\left[(Y-\mu_Y)^3\right]$ por definición de esperanza:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(Y-\mu_Y)^3\right] &= \int_0^\infty (y-\mu_Y)^3 f(y)\,dy \\
&= \int_0^\infty \left(y^3 - 3\mu_Y y^2 + 3\mu_Y^2 y - \mu_Y^3\right) f(y)\,dy \\
&= \int_0^\infty y^3 f(y)\,dy - 3\mu_Y \int_0^\infty y^2 f(y)\,dy + 3\mu_Y^2 \int_0^\infty y f(y)\,dy - \mu_Y^3 \int_0^\infty f(y)\,dy \\
&= \mathbb{E}[Y^3] - 3\mu_Y\,\mathbb{E}[Y^2] + 3\mu_Y^2\,\mathbb{E}[Y] - \mu_Y^3 \cdot 1 \\
&= \mathbb{E}[Y^3] - 3\mu_Y\,\mathbb{E}[Y^2] + 3\mu_Y^2\,\mu_Y - \mu_Y^3 \\
&= \mathbb{E}[Y^3] - 3\mu_Y\,\mathbb{E}[Y^2] + 2\mu_Y^3.
\end{aligned}$$

De lo anterior, se necesita entonces el segundo y tercer momento de Y. Del formulario se tiene que

$$\mathbb{E}(Y^r) = e^{r\lambda} M_Z(r\zeta) = \exp\left(r\lambda + r^2\zeta^2/2\right)$$

Así, reemplazando los valores de λ, ζ, $r = 1, 2$ y 3 obtenemos los tres momentos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \exp\left(\lambda + \zeta^2/2\right) = 886.2 \\
\mathbb{E}(Y^2) &= \exp\left(2\lambda + 4\zeta^2/2\right) = 854141.5 \\
\mathbb{E}(Y^3) &= \exp\left(3\lambda + 9\zeta^2/2\right) = 895298200
\end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\theta_Y = \frac{\mathbb{E}\left[(Y-\mu_Y)^3\right]}{\sigma_Y^3} = \frac{\mathbb{E}\left[(Y-\mu_Y)^3\right]}{\left(\mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2\right)^{3/2}} = \frac{16471498}{18029967} = 0.9135$$

Asignación de Puntaje:

(a)

Logro 1 [0.2 ptos]: por indicar que el percentil x_p de una distribución normal está dado por $x_p = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p)$.

Logro 2 [0.3 ptos]: por obtener que $\mu = 7.5$ [0.1 pto] y que $\sigma = 2.611$ [0.2 pto] tras utilizar la información del enunciado.

Logro 3 [1.0 ptos]: por identificar que se solicita el percentil 90 %, $x_{0.9}$, [0.7 pto] y obtener que $x_{0.9} = 10.842$ [0.3 pto].

(b)

Logros 4 y 5 son los mismos que el Logro 1 y 2. Por obtener los parámetros se asigna puntaje a los ítems (a) y (b).
Logro 4 [0.2 ptos]: por indicar que el percentil x_p de una distribución normal está dado por $x_p = \mu + \sigma\Phi^{-1}(p)$.

Logro 5 [0.3 ptos]: por obtener que $\mu = 7.5$ [0.1 pto] y que $\sigma = 2.611$ [0.2 pto] tras utilizar la información del enunciado.

Logro 6 [1.0 ptos]: por reconocer que se solicita $P(X < 6)$ [0.5 pto] y obtener que $P(X < 6) = 0.2843$ [0.5 pto].

(c)

Logro 7 [1.0 ptos]: por indicar que el percentil x_p de una distribución LogNormal está dado por $y_p = \exp(\lambda + \zeta \cdot \Phi^{-1}(p))$.

Logro 8 [0.3 ptos]: por obtener que $\lambda = \log(850)$ [0.3 ptos] y que $\zeta = 0.2897$ a través de los datos dados en el enunciado.

Logro 9 [0.2 ptos]: por obtener que IQR $= 329.8$.

(d)

Logro 10 [0.7 ptos]: por expandir $\mathbb{E}\left[(Y - \mu_Y)^3\right]$ para identificar que se requieren los tres momentos de Y.

Logro 11 [0.7 ptos] por utilizar formulario para obtener las expresiones correctas para $\mathbb{E}(Y)$ [0.2 ptos], $\mathbb{E}(Y^2)$ [0.2 ptos] y $\mathbb{E}(Y^3)$ [0.3 ptos].
Logro 12 [0.1 ptos] por obtener el valor correcto de θ_Y.

Tiempo: 120 minutos