Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Segundo Semestre 2025

Curso	**:**	**Probabilidad y Estadística**
Sigla	**:**	**EYP1113**
Profesores	**:**	**Ricardo Aravena, Maritza Márquez , Bladimir Morales , Mauricio Toro, Ricardo Olea, Jose Ordoñez, Felipe Ossa, Nixón Jerez, Daniel Saavedra, Cristian Capetillo y Hernán Robledo**

PAUTA INTERROGACIÓN 4

Pregunta 1

La compañía *Léis* fabrica y embolsa papas fritas corte americano. Un tipo de empaques indica que el contenido neto de cada bolsa es de "150 gramos". Sin embargo, usted tiene dudas respecto a lo promocionado y quisiera probar estadísticamente que estas bolsas pesan menos que lo que indica este tipo de empaque. Para esto compró una muestra de $n = 10$ bolsas de "150 gramos" y pesó cada una. De la muestra se obtuvo un peso promedio de 147.5 gramos, y una desviación estándar muestral de 6.2 gramos.

Asuma que el peso de cada empaque de "150 gramos" es independientes de las demás y tiene una distribución normal, con media μ y desviación estándar σ, ambas desconocidas.

(a) **[3.0 ptos]** En base a los datos obtenidos, concluya respecto a la hipótesis que se plantea. Indique hipótesis contrastadas, estadístico de prueba apropiado, región crítica o valor-p y una conclusión. Utilice un nivel de significancia del 5 %.

(b) **[3.0 ptos]** Por medio de un test de hipótesis apropiado, muestre si la varianza poblacional σ^2 es significativamente distinta de 36 gramos^2. Indique hipótesis contrastadas, estadístico de prueba apropiado, región crítica o valor-p y la conclusión. Utilice un nivel de significancia del 5 %.

Solución

(a)

Si μ es el peso medio real de las bolsas, las hipótesis a contrastar son

$$H_0 \ : \ \mu = 150 \qquad \text{vs} \qquad H_a \ : \ \mu < 150$$

El estadístico de prueba apropiado corresponde a

$$T_0 = \frac{\overline{X}_n - 150}{s/\sqrt{10}}$$

que bajo la hipótesis nula H_0 tiene distribución t-Student(9). A partir de los datos, el valor del estadístico es

$$T_0 = \frac{147.5 - 150}{6.2/\sqrt{10}} = -\frac{2.5}{1.96} = -1.275$$

Se rechaza H_0 si $T_0 < t_{0.05;9} = -t_{0.95;9}$. De la tabla, $t_{0.95;9} = 1.833$. Como $T_0 \geq -1.833$, entonces, con un nivel de 5 % de significancia, no existe evidencia estadística suficiente para afirmar que las bolsas Léis de "150 gramos" pesan realmente menos de 150 gramos.
Alternativamente, el valor-p se obtiene a continuación:

$$\text{valor-p} = P(T_9 < T_0) = P(T_9 < -1.275) = P(T_9 > 1.275) = 1 - P(T_9 < 1.275)$$

De la tabla de percentiles, se identifica que $t_{0.9} = 1.383$. Por ello, $P(T_9 < 1.275) < 0.9$. Luego, valor-p > 0.1. Por ende, con un nivel de 5 % de significancia, no existe evidencia estadística suficiente para afirmar que las bolsas Léis de "150 gramos" pesan realmente menos de 150 gramos.

(b)

Las hipótesis a contrastar son

$$H_0 \ : \ \sigma^2 = 36 \qquad \text{vs} \qquad H_a \ : \ \sigma^2 \neq 36$$

El estadístico de prueba adecuado corresponde a

$$C_0 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2}$$

que bajo la hipótesis nula H_0 tiene distribución Chi cuadrado $\chi^2(9)$.
A partir de los datos, el valor del estadístico resultó ser

$$C_0 = \frac{(10-1) \cdot 6.2^2}{36} = \frac{345.96}{36} = 9.61$$

Se rechaza H_0 si $C_0 < \chi^2_{0.025;9}$ o si $C_0 > \chi^2_{0.975;9}$. De la tabla, $\chi^2_{0.025;9} = 2.7$, y $\chi^2_{0.975;9} = 19.023$. Como $2.7 \leq C_0 \leq 19.023$, entonces con un nivel de 5 % de significancia, no existe evidencia estadística suficiente para afirmar que la varianza del peso de las bolsas de "150 gramos" es significativamente distinto de 36 gramos^2.

De manera equivalente, el valor-p de esta prueba está dado por

$$\text{valor-p} = 2\left[\text{mín}\left(P(\chi^2_9 \leq C_0), P(\chi^2_9 \geq C_0)\right)\right] = 2\left[\text{mín}\left(P(\chi^2_9 \leq 9.61), P(\chi^2_9 \geq 9.61)\right)\right]$$

Del formulario, se tiene que para la distribución χ^2_9 que $c_{0.6} = 9.414$ y $c_{0.7} = 10.656$. Por ende, $P(\chi^2_9 \leq 9.61) < 0.7$, y $P(\chi^2_9 \geq 9.61) > 0.6$. En cualquier caso, el doble de cualquiera de estas dos probabilidades es mayor a la significancia del 5 %. Por ende, no existe evidencia estadística suficiente para afirmar que la varianza del peso de las bolsas de "150 gramos" es significativamente distinto de 36 gramos^2.

Asignación de Puntaje:

(a)

Logro 1 [0.5 ptos]: por indicar la hipótesis nula y alternativa correctamente.

Logro 2 [0.5 ptos]: por seleccionar el estadístico de prueba correcto.

Logro 3 [1 ptos]: por obtener el valor-p o la región de rechazo junto al estadístico para tomar la decisión.

Logro 4 [1 ptos]: Por tomar la decisión correcta respecto a la hipótesis nula, justificando con la prueba de hipótesis. Este logro podrá ser evaluado positivamente si la hipótesis nula y alternativa están correctamente formuladas y se ha identificado adecuadamente el estadístico de prueba, incluso si existen errores en el cálculo del valor-p o la determinación de la región de rechazo.

(b)

Logro 5 [0.5 ptos]: por indicar la hipótesis nula y alternativa correctamente.

Logro 6 [0.5 ptos]: por seleccionar el estadístico de prueba correcto.

Logro 7 [1 ptos]: por obtener el valor-p o la región de rechazo junto al estadístico para tomar la decisión.

Logro 8 [1 ptos]: Por tomar la decisión correcta respecto a la hipótesis nula, justificando con la prueba de hipótesis. Este logro podrá ser evaluado positivamente si la hipótesis nula y alternativa están correctamente formuladas y se ha identificado adecuadamente el estadístico de prueba, incluso si existen errores en el cálculo del valor-p o la determinación de la región de rechazo.

Pregunta 2

Durante el reciente *CyberDay*, muchas empresas ofrecieron servicio de entrega *express*. Con el fin de evaluar si los tiempos medios de entrega han disminuido de manera significativa, se registra el tiempo de entrega (en horas) de pedidos enviados con este sistema. En total se observan $n = 93$ entregas independientes entre si con un tiempo promedio de 4.53 horas. Un análisis estadístico sugiere que los tiempos observados pueden modelarse mediante una distribución Gamma con parámetro de forma conocido $k = 2$ y tasa desconocida ν. Es decir, $X_i \sim$ Gamma$(k = 2, \nu), i = 1, \ldots, n,$, donde $\nu > 0$ es el parámetro de tasa de los tiempos de entrega *express*.

(a) **[3.0 ptos]** Obtenga un intervalo de confianza al $95\,\%$ para ν basado en el estimador de máxima verosimilitud (EMV) de ν, el cual está dado por $\hat{\nu} = 2/\overline{X}$.

(b) **[3.0 ptos]** Utilizando el modelo propuesto, evalúe si existe evidencia estadística para concluir que el tiempo medio de entrega bajo el sistema *express* es inferior a 5 horas. Considere un nivel de significancia del $5\,\%$.

Ayuda: bajo este modelo se tiene que $I_n(\nu) = 2n/\nu^2$.

Solución

(a)

Del formulario se conoce la distribución asintótica de los EMV, dada por

$$\sqrt{I_n(\nu)}\,(\hat{\nu} - \nu) \sim \text{Normal}(0, 1),$$

donde $I_n(\nu)$ es la información de Fisher. Para una muestra i.i.d. desde Gamma(k, ν) con k conocido se cumple

$$I_n(\nu) = \frac{2n}{\nu^2}.$$

Entonces,

$$\hat{\nu} \sim \text{Normal}\left(\nu,\ \sqrt{\frac{1}{I_n(\nu)}}\right) = \text{Normal}\left(\nu,\ \frac{\nu}{\sqrt{2n}}\right).$$

Para construir un IC al 95 % para ν se usa la fórmula

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\hat{\nu} - \nu}{\sqrt{\hat{\nu}^2/(2n)}} \leq 1.96\right) \approx 0.95,$$

y se despeja ν, de lo cual se obtiene que

$$\text{IC} = \hat{\nu} \pm 1.96\ \frac{\hat{\nu}}{\sqrt{2n}}.$$

Reemplazando los valores, se obtiene que el intervalo de confianza aproximado al 95 % para ν es

$$(0.4415 - 0.0634,\ 0.4415 + 0.0634) = (0.3780, 0.5049)$$

(b)

Solución 1:

Bajo el modelo Gamma$(k = 2, \nu)$ con parámetro de tasa ν, la media es

$$\mu = \frac{2}{\nu}.$$

El hipótesis nula y alternativa pedida es evaluar

$$H_0:\ \mu = 5 \qquad \text{vs} \qquad H_1:\ \mu < 5.$$

Podemos reescribir la hipótesis en función de ν, ya que

$$\mu < 5 \iff \frac{2}{\nu} < 5 \iff \nu > 0.4.$$

Así, la prueba es equivalente a evaluar

$$H_0:\ \nu = 0.4 \qquad \text{vs} \qquad H_1:\ \nu > 0.4.$$

Para evaluar esta hipótesis, utilizamos la normalidad asintótica de los EMV. Del enunciado se tiene que $I_n(\nu) = \nu^2/2n$, por lo que

$$\hat{\nu} \sim \text{Normal}\left(\nu,\ \sqrt{\frac{1}{I_n(\nu)}}\right) = \text{Normal}\left(\nu,\ \frac{\nu}{\sqrt{2n}}\right).$$

Así, el estadístico de prueba está dado por

$$Z = \frac{\hat{\nu} - \nu_0}{\nu_0/\sqrt{2n}}.$$

Con $n = 93$ y $\nu_0 = 0.4$:

$$Z = \frac{0.4415 - 0.4}{0.4/\sqrt{2 \cdot 93}} \approx \frac{0.0415}{0.0293} \approx 1.415.$$

Para una prueba unilateral a la derecha con $\alpha = 0.05$, la región se rechazo se define por el cuantil $z_{0.95} = 1.645$. Como $1.415 < 1.645$ no existe evidencia suficiente para rechazar H_0.
Equivalentemente, el valor-p se calcula como

$$\text{valor-p} = P(Z > 1.415) = 1 - P(Z < 1.415) \approx 1 - P(Z < 1.42) = 1 - 0.9222 = 0.0778.$$

Como el valor-p es mayor a la significancia, no existe evidencia suficiente para rechazar H_0. Es decir, no hay evidencia suficiente para considerar que los tiempos medios de entregas sean menores a 5 horas.

Solución 2:

Bajo el modelo Gamma$(k = 2, \nu)$ con parámetro de tasa ν, la media es

$$\mu = \frac{2}{\nu}.$$

El hipótesis nula y alternativa pedida es evaluar

$$H_0:\ \mu = 5 \qquad \text{vs} \qquad H_1:\ \mu < 5.$$

Usando la propiedad de invarianza del EMV (formulario), el EMV de $\mu = 2/\nu$ es $\hat{\mu} = \frac{2}{\hat{\nu}}$. Así, $\hat{\mu} = 2/0.4415 = 4.53$. Si definimos $g(\nu) = 2/\nu$, por formulario la distribución asintótica del EMV $g(\hat{\nu})$ es

$$g(\hat{\nu}) \sim \text{Normal}\left(g(\nu),\ \frac{[g'(\nu)]^2}{I_n(\nu)}\right).$$

Aquí

$$g'(\nu) = -\frac{2}{\nu^2}, \qquad I_n(\nu) = \frac{2n}{\nu^2}$$

Bajo H_0 se tiene $\mu_0 = 5$, por lo que

$$\mu_0 = \frac{2}{\nu_0} \Rightarrow \nu_0 = \frac{2}{5} = 0.4.$$

Entonces, bajo H_0:

$$\text{Var}(\hat{\mu}) \approx \frac{[g'(\nu_0)]^2}{I_n(\nu_0)} = \frac{4/\nu_0^4}{2n/\nu_0^2} = \frac{2}{n\,\nu_0^2}$$

Reemplazando valores:

$$\text{Var}(\hat{\mu}) = \frac{2}{93 \cdot 0.4^2} = 0.1344$$

Así, el estadístico de prueba es

$$Z_0 = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\mu})}} = \frac{4.53 - 5}{\sqrt{0.1344}} = -1.282$$

Bajo H_0, se tiene aproximadamente $Z \sim \text{Normal}(0, 1)$. Para una prueba unilateral a la izquierda con $\alpha = 0.05$, la región de rechazo está definida por el cuantil $z_{0.05} = -1.645$. Como $Z_0 = -1.282 > z_{0.05}$, no existe evidencia suficiente para rechazar H_0.
Alternativamente, el valor-p se calcula como

$$\text{valor-p} = P(Z < -1.282) = P(Z > 1.282) = 1 - P(Z < 1.282) \approx 1 - P(Z < 1.28) = 1 - 0.8997 = 0.1003$$

Como el valor-p es mayor a la significancia del 5 %, no existe evidencia suficiente para rechazar H_0. Es decir, no hay evidencia suficiente para considerar que los tiempos medios de entregas sean menores a 5 horas.

Asignación de Puntaje:

(a)

Logro 1 [1.0 ptos]: por reconocer la distribución asintótica del EMV: $\sqrt{I_n(\nu)}(\hat{\nu} - \nu) \dot{\sim} \text{Normal}(0, 1)$.

Logro 2 [1.5 ptos]: por indicar con o sin desarrollo que la fórmula del intervalo de confianza está dado por $\hat{\nu} \pm z_{0.975}\sqrt{\text{Var}(\hat{\nu})}$ o por $\hat{\nu} \pm z_{0.975} \cdot \hat{\nu}/\sqrt{2n}$.

Logro 3 [0.5 ptos]: por reemplazar los valores del enunciado y obtener que el IC $= (0.3780, 0.5049)$.

(b)

Logro 4 [1.0 ptos]: por reconocer la distribución asintótica del EMV: $\sqrt{I_n(\nu)}(\hat{\nu} - \nu) \dot{\sim} \text{Normal}(0, 1)$.

- Puntaje idéntico al asignado en el Logro 1

Logro 5 [0.5 ptos]: por indicar la hipótesis nula y alternativa correctamente.

Logro 6 [0.5 ptos]: por confeccionar el estadístico de prueba correcto.

Logro 7 [0.5 ptos]: por obtener el valor-p o la región de rechazo junto al estadístico para tomar la decisión.

Logro 8 [0.5 ptos]: Por tomar la decisión correcta respecto a la hipótesis nula, justificando con la prueba de hipótesis. Este logro podrá ser evaluado positivamente si la hipótesis nula y alternativa están correctamente formuladas y se ha identificado adecuadamente el estadístico de prueba, incluso si existen errores en el cálculo del valor-p o la determinación de la región de rechazo.

Pregunta 3

Un hospital quiere comparar la carga de atención en dos servicios de urgencias, el Servicio A y el Servicio B. Se toma una muestra aleatoria de personas que utilizan estos servicios y se registra el tiempo de atención en minutos. A partir de esta muestra, se obtuvieron las siguientes estadísticas:

Servicio	Tamaño muestral (n)	Media (min)	Desv. estándar (min)
A	18	52.3	6.0
B	22	47.1	5.0

Asuma que las poblaciones de cada servicio son independientes y que provienen de una distribución normal.

(a) **[3.0 ptos]** Evalúe si existe suficiente evidencia para concluir que los tiempos medios de atención entre ambos servicios difieren. Indique hipótesis contrastadas, estadístico de prueba apropiado, región crítica o valor-p y la conclusión. Utilice un nivel de significancia del 5 %.

(b) **[3.0 ptos]** Adicionalmente, se registró el número de pacientes que ingresaron a cada servicio. En el Servicio A se observaron 990 ingresos en 18 días y en el Servicio B, 924 ingresos en 22 días. Suponga que los números de llegadas diarias son independientes entre sí y que, para cada servicio, se distribuyen según un modelo Poisson con tasas medias λ_A y λ_B, respectivamente.

Basado en estos modelos, evalúe si existe evidencia estadística para concluir que las tasas medias de llegada de pacientes difieren entre ambos servicios. Indique las hipótesis a contrastar, el estadístico de prueba utilizado, la región crítica o el valor-p y la conclusión. Utilice un nivel de significancia del 5 %.

Solución

(a)

Sea μ_X el tiempo medio de atención en el Servicio A y μ_Y el tiempo medio de atención en el Servicio B. La prueba de interés es

$$H_0 : \mu_X = \mu_Y, \qquad H_1 : \mu_X \neq \mu_Y.$$

Antes de elegir el estadístico para comparar medias, se debe decidir si es razonable suponer varianzas iguales. Para ello se contrasta

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2, \qquad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2.$$

El estadístico de prueba es

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{36}{25} = 1.44.$$

Bajo H_0, $F \sim F(17, 21)$. Usando los cuantiles

$$F_{0.025}(17, 21) = 0.36, \qquad F_{0.975}(17, 21) = 2.42,$$

se obtiene

$$0.36 < 1.44 < 2.42 \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0.$$

Por lo tanto, no hay evidencia para rechazar que las varianzas sean distintas, por lo que se considerarán iguales. Se obtiene el mismo resultado al hacer la prueba con el recíproco del estadístico de prueba: $F = S_Y^2/S_X^2 = 25/36 = 0.694$. Como este valor es mayor al cuantil $F_{0.025}(17, 21) = 0.36$, no se rechaza H_0.

El estadístico de prueba bajo varianzas iguales es

$$T = \frac{\bar{X}_n - \bar{Y}_m}{S_p\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}},$$

donde la varianza agrupada S_p se estima como

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2} = \frac{17(36) + 21(25)}{18+22-2} = \frac{612+525}{38} = 29.9210.$$

Por lo tanto,

$$S_p = \sqrt{29.9210} \approx 5.47.$$

El estadístico T queda

$$T = \frac{52.3 - 47.1}{5.47\sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{22}}} = \frac{5.2}{5.47\sqrt{\frac{1}{18} + \frac{1}{22}}} \approx 2.991.$$

Bajo H_0, T sigue una distribución t con $n + m - 2 = 38$ grados de libertad. Para un nivel de significancia del $5\,\%$, la región crítica corresponde a rechazar H_0 si el estadístico de prueba es mayor a $t_{0.975}(38)$ o menor a $t_{0.0275}(38)$. Usamos los cuantiles con $\nu = \infty$ de la tabla de cuantiles para obtener que $t_{0.0275}(38) = -1.96$ y $t_{0.0275}(38) = 1.96$. Como $T = 2.991 > 1.96$, hay evidencia suficiente para rechazar H_0, por lo que los tiempos medios de atención difieren entre ambos servicios.

Equivalentemente, calculamos el valor-p para concluir. Para una prueba de hipótesis bilateral el valor-p se calcula como

$$\text{valor-p} = 2P(T > 2.991)$$

Utilizando la aproximación normal de la distribución t-student para grados de libertad mayores a 30, obtenemos que

$$P(T > 3.04) \approx P(Z > 2.991) = 1 - P(Z < 2.991) = 1 - 0.9986 = 0.0014$$

Así, valor-p $= 2 \cdot 0.0014 = 0.0028$. Como el valor-p es menor a la significancia, entonces existe evidencia suficiente para rechazar H_0, por lo que los tiempos medios de atención difieren entre ambos servicios.

(b)

Sea λ_X la tasa media de llegadas diarias en el Servicio A y λ_Y la tasa media de llegadas diarias en el Servicio B. A partir de los datos:

$$\bar{V} = \frac{990}{18} = 55, \qquad \bar{W} = \frac{924}{22} = 42,$$

se considera la prueba

$$H_0 : \lambda_X = \lambda_Y \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \lambda_X \neq \lambda_Y.$$

A partir del formulario, se identifica que el estadístico de prueba para evaluar esta hipótesis correpsonde a

$$Z_0 = \frac{\bar{V} - \bar{W}}{\sqrt{\frac{\bar{V}}{18} + \frac{\bar{W}}{22}}} = \frac{55 - 42}{\sqrt{\frac{55}{18} + \frac{42}{22}}} = \frac{13}{\sqrt{3.06 + 1.91}} = \frac{13}{2.35} = 5.53.$$

La región de rechazo corresponda a los valores menores a $z_{0.025} = -1.96$ y $z_{0.975} = 1.96$. Como $Z_0 = 5.53 > 1.96$, se rechaza H_0, concluyendo que existe evidencia suficiente para afirmar que las tasas de llegadas diarias difieren entre los servicios A y B.
Equivalentemente, calculamos el valor-p como

$$\text{valor-p} = 2P(Z > |Z_0|) = 2P(Z > 5.53)$$

Esta probabilidad es un valor muy cercano a cero, ya que la probabilidad acumulada en las colas más allá del valor 3.0 de la distribución normal estándar es cercano a cero. Así, el valor-p es menor al nivel de significancia, concluyendo que existe evidencia suficiente para afirmar que las tasas de llegadas diarias difieren entre los servicios A y B.

Asignación de Puntaje:

(a)

Logro 1 [0.5 ptos]: Plantea correctamente las hipótesis $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ y $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ de comparación de poblaciones.

- No se asigna puntaje si plantea hipótesis de una única población.

Logro 2 [1.0 ptos]: Indica que es necesario verificar la igualdad de varianzas y escribe correctamente el estadístico $F = S_X^2/S_Y^2$, interpretando que no se rechaza H_0 de varianzas iguales.

- Si estudiante se salta este paso, no se asigna este logro. Sí se pueden asignar los siguientes logros.

Logro 3 [0.5 ptos]: Por indicar uso de un estadístico de prueba para comparación de medias bajo varianzas iguales [1.0 ptos] y obtener que $T = 2.991$ [0.2 ptos].

- Si utiliza el estadístico bajo varianzas distintas debe obtener que $T = 2.936$.

Logro 4 [0.5 ptos]: por obtener el valor-p o la región de rechazo para tomar la decisión.

Logro 5 [0.5 ptos]: Por tomar la decisión correcta respecto a la hipótesis nula, justificando con la prueba de hipótesis. Este logro podrá ser evaluado positivamente si la hipótesis nula y alternativa están correctamente formuladas y se ha identificado adecuadamente el estadístico de prueba, incluso si existen errores en el cálculo del valor-p o la determinación de la región de rechazo.

(b)

Logro 6 [1.0 ptos]: Plantea correctamente las hipótesis $H_0 : \lambda_X = \lambda_Y$ y $H_1 : \lambda_X \neq \lambda_Y$.

- No asignar puntaje si desarrolla como una comparación de medias asumiendo normalidad de los datos.

Logro 7 [1.0 ptos]: Por reconocer del formulario el estadístico de prueba basado en la distribución Poisson para probar la hipótesis.

- No asignar puntaje si desarrolla como una comparación de medias asumiendo normalidad de los datos.

Logro 8 [0.5 ptos]: por obtener el valor-p o la región de rechazo para tomar la decisión.

Logro 9 [0.5 ptos]: Por tomar la decisión correcta respecto a la hipótesis nula, justificando con la prueba de hipótesis.

- No se asigna este puntaje si la prueba de hipótesis no estaba basada en comparación de parámetros de tasa de una distribución poisson.

Pregunta 4

El consumo de combustible para transporte es un indicador clave en el análisis de movilidad y políticas energéticas. Para el año 2001 se dispone de información, a nivel estatal de Estados Unidos, para 51 estados, con variables demográficas, económicas y de infraestructura asociadas al uso de gasolina en transporte vehicular. Las variables consideradas son:

- `Gasolina`: gasolina consumida por habitante (galones per cápita).
- `Nlic`: número de personas con licencia de conducir por cada 1.000 habitantes.
- `Ingreso`: ingreso personal per cápita (miles de dólares).
- `logMillas`: logaritmo base 2 del total de millas de carreteras del estado.
- `Impuesto`: impuesto estatal a la gasolina (centavos por galón).

Para explicar el consumo de gasolina por habitante, `Gasolina`, se ajustaron cinco modelos, incluyendo el que sólo posee intercepto (Modelo 0). La siguiente tabla resume sus resultados:

Modelo	Regresores	SCE	R^2
0	Intercepto	395 694	0.000
1	NLic	309 037	0.219
2	NLic + logMillas	242 956	0.386
3	NLic + logMillas + Ingreso	212 092	0.464
4	NLic + logMillas + Ingreso + Impuesto	209 717	0.470

(a) **[2.0 ptos]** Calcule, para cada modelo, el coeficiente de determinación ajustado y utilícelo para determinar cuál modelo presenta el mejor ajuste, indicando por qué este criterio es preferible al uso del R^2.

(b) **[2.0 ptos]** La prueba F de comparación de modelos anidados (ver formulario) permite evaluar si una variable adicional mejora significativamente el ajuste del modelo. Evalúe a una significancia del 10 % si la inclusión de la variable `Ingreso` en el modelo 3 es significativa y si la inclusión de la variable `Impuesto` en el modelo 4 lo es.

(c) **[2.0 ptos]** Suponga que a los residuos del modelo 4 se ajusto una distribución Normal$(0, \sigma^2)$ y el estadístico χ^2 de Pearson resulto igual a 7.78 considerando cinco categorías. ¿Existe suficiente evidencia para rechazar que los residuos distribuyen Normal? Considere un nivel de significancia del 5 %.

Solución

(a)

Para cada modelo se dispone del tamaño muestral $n = 51$, del número de regresores k (sin contar el intercepto) y del coeficiente de determinación R^2. El coeficiente de determinación ajustado se define como

$$R^2_{\text{aj}} = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}\,(1 - R^2).$$

Aplicando esta expresión a cada modelo:

Modelo	k	R^2	R^2_{aj}
0	0	0.000	0.000
1	1	0.219	0.203
2	2	0.386	0.360
3	3	0.464	0.430
4	4	0.470	0.424

El modelo con mayor R^2_{aj} es el Modelo 3, por lo que es el que presenta mejor ajuste entre los considerados.

El uso de R^2_{aj} es preferible al de R^2 simple porque penaliza la inclusión de regresores adicionales: R^2 nunca disminuye al agregar variables, mientras que R^2_{aj} sólo aumenta si la nueva variable mejora lo suficiente el ajuste en relación con la pérdida de grados de libertad.

(b)

Para comparar dos modelos anidados se utiliza el estadístico

$$F = \frac{\big(\text{SCE}_1 - \text{SCE}_2\big)/r}{\text{SCE}_2/\big(n-(k+r)-1\big)},$$

donde SCE_1 corresponde al modelo base con k regresores, SCE_2 al modelo extendido con $k+r$ regresores y r es el número de regresores nuevos. Bajo H_0 (los nuevos regresores no aportan) se tiene

$$F \sim F\big(r,\ n-(k+r)-1\big).$$

Aquí siempre se agrega una sola variable ($r=1$), con $n=51$:

- Inclusión de la variable Ingreso: Modelo 2 vs Modelo 3

$$F \approx \frac{242956-212092}{212092}\cdot\frac{47}{1} \approx 6.84, \qquad F \sim F(1,47).$$

- Inclusión de la variable Impuesto: Modelo 3 vs Modelo 4

$$F \approx \frac{212092-209717}{209717}\cdot\frac{46}{1} \approx 0.52, \qquad F \sim F(1,46).$$

Los valores críticos al nivel $\alpha = 0.10$ son:

$$F_{0.90}(1,47) = 2.82, \quad F_{0.90}(1,46) \approx 2.82,$$

- **Modelo 2 vs Modelo 3:** $F \approx 6.84 > 2.82 \ \Rightarrow$ se rechaza H_0. `logMillas` es significativa al 10 %.
- **Modelo 3 vs Modelo 4:** $F \approx 0.52 < 2.82 \ \Rightarrow$ no se rechaza H_0. `Impuesto` no es significativa al 10 %.

(c)

Se contrasta la normalidad de los residuos del Modelo 4 mediante la prueba χ^2 de Pearson. Las hipótesis son:

H_0 : Los residuos siguen una distribución Normal$(0,\sigma^2)$ vs H_1 : Los residuos no siguen dicha distribución.

Se obtiene un estadístico observado $\chi^2 = 7.78$ con cinco categorías. Como se ajusta una Normal con media conocida 0 y varianza desconocida, se estima un parámetro, por lo que los grados de libertad son

$$\text{gl} = 5-1-1 = 3.$$

Para $\alpha = 0.05$ y 3 grados de libertad, el valor crítico es aproximadamente

$$\chi^2_{0.95,3} \approx 7.815.$$

Dado que

$$7.78 < 7.815,$$

no se rechaza H_0 al 5 %. No existe evidencia suficiente para concluir que los residuos del Modelo 4 se desvían de la distribución Normal$(0,\sigma^2)$.

Asignación de Puntaje:

Pregunta 4

(a)

Logro 1 [1.0 ptos]: por cada valor de r^2 calculado [0.2 ptos] por cada uno e identificar que el modelo 3 es el mejor [0.2 ptos].

Logro 2 [1.0 ptos]: por indicar que r^2 es preferible al R^2 porque el primero penaliza por número de predictores.

(b)

Logro 3 [1.0 ptos]: por identificar adecuadamente las sumas de cuadrados de error SCE_1 y SCE_2, así como los grados de libertad del denominador, para así obtener $F_1 = 6.84$ y $F_2 = 0.52$

- Realizar descuentos mínimos (0.1 ptos) por errores menores de identificación de r y k.

Logro 4 [0.4 ptos]: por obtener identificar los cuantiles requeridos: $F_{0.9}(1, 47) = F_{0.9}(1, 46) = 2.82$.

Logro 5 [0.6 ptos]: por concluir que la inclusión de la variable `Ingreso` es significativa [0.3 ptos], pero que la inclusión de la variable `Impuesto` no lo es [0.3 ptos].

(c)

Logro 6 [1.0 ptos]: por identificar el número correcto de grados de libertad ,$gl = 3$.

Logro 7 [0.5 ptos]: por identificar el cuantil requerido: $\chi^2_{0.95,3} = 7.815$.

Logro 8 [0.5 ptos]: por concluir que no existe evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula de normalidad.

Tiempo: 120 minutos