Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Temporada Académica de Verano (enero 2022)

Examen - Pauta

Pregunta 1

(a) $P(A) \cdot P(B) \leq P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$ **Verdadera**

Tenemos que

$$P(A) \cdot P(B) \leq P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P(B).$$

Como A y B son disjuntos, esto implica que

$$P(A) + P(B) = P(A \cup B) \leq 1,$$

lo cuál es siempre verdadero. **[0.5 Ptos.]**

(b) $P(A) \cdot P(\bar{B}) \leq P(\bar{A}) \cdot P(B)$ **Falso**

Tenemos que

$$P(A) - P(A) \cdot P(B) \leq P(B) - P(A) \cdot P(B) \rightarrow P(A) \leq P(B).$$

Si A y B son disjuntos no implica que el resultado anterior se cumpla siempre. **[0.5 Ptos.]**

Pregunta 2

Definamos como evento A si un contacto estrecho al realizarse un test de antigenos resulta positivo y como B si un contacto estrecho contrajo Covid.

Del enunciado se tiene que

$$P(A) = 0.2, \quad P(B \,|\, A) = 0.95, \quad P(B \,|\, \overline{A}) = 0.10$$

¿Cuál es la probabilidad que haya contraído Covid19 si el resultado del test es negativo?

$$P(B \,|\, \overline{A}) = 0.10 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Nota: Si el alumno responde $P(\overline{A} \cap B) = 0.08$ *o* $P(\overline{A} \,|\, B) = 0.2963$*, asignar [0.5 Ptos.].*

Pregunta 3

Se pide

$$P(A_1 \cup [A_2 \cap A_3]) = P(A_1) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Como son eventos mutuamente independientes

$$P(A_1 \cup [A_2 \cap A_3]) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} = 0.4074074 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Nota: Si el alumno responde 0.4444444 *o* 0.8148148*, asignar [0.5 Ptos.].*

Pregunta 4

Si $T \sim$ Exponencial(ν), entonces del enunciado se tiene que

$$P(T > 60) = e^{-\nu \cdot 60} = 0.3 \rightarrow \nu = \frac{-\ln(0.3)}{60}$$

Se pide

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{\nu} = -\frac{60}{\ln(0.30)} = 49.83501 \quad \textbf{[1.0 Ptos.]}$$

Nota: Si el alumno responde $-\frac{60}{\ln(0.70)} = 168.2204$ *asignar [0.8 Ptos.]. Si el alumno entrega como respuesta el valor de* ν *igual a* 0.02006621 *asignar [0.5 Ptos] y* 0.005944582 *[0.3 Ptos.]*

Pregunta 5

Sea X el número de días en que se descargan más de 3 toneladas en las próximas 4 jornadas laborales.

$$X \sim \text{Binomial}(n = 4,\, p)$$

con $p =$ `1 - pweibull(3, shape = 2, scale = 5)`.

Se pide $p_X(4) =$ `dbinom(4, size = 4, prob = p) = 0.2369278`. **[1.0 Ptos.]**

Nota: Si el alumno responde $p = 0.6976763$ *asignar [0.5 Ptos.]*

Pregunta 6

```
mu = c(720, 680)
sigma = matrix(c(50^2, 0.85*50*80, 0.85*80*50, 80^2), ncol = 2, byrow = T)
mvtnorm::pmvnorm(mean = mu, sigma = sigma, lower = c(750,750), upper = c(Inf,Inf))[1]
[1] 0.1576779
```

[0.5 Ptos.]

```
mu = 680 + (750 - 720) * 80 * 0.85 / 50
sigma = 80 * sqrt(1-0.85^2)
1-pnorm(750, mean = mu, sd = sigma)
[1] 0.2441908
```

[0.5 Ptos.]

Pregunta 7

Tenemos que

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \qquad T \,|\, X = x \sim \text{Gamma}(k,\, 1/x)$$

Se pide δ_T.

Aplicado teoremas de esperanzas iteradas tenemos que

$$\mu_T = k\,\lambda \quad \text{y} \quad \sigma_T^2 = k \cdot (\lambda^2 + \lambda) + k^2 \cdot \lambda$$

Reemplazando $k = 3$ y $\lambda = 10$, entonces $\delta_T = 0.6831301$. **[1.0 Ptos.]**

Nota: Si el alumno responde $\frac{1}{\sqrt{k}} = 0.5773503$ *asignar [0.5 Ptos.]*

Pregunta 8

Valor-p

```
Data = rio::import("SINCA2022.xlsx")
X = dplyr::filter(Data,  MONTH == 11)$CO
par = fitdistrplus::fitdist(data = X, distr = "weibull", method = "mle")$estimate
ks.test(X, "pweibull", shape = par[1], scale = par[2])$p.value
[1] 0.131353
```

[0.7 Ptos.]

¿Existe evidencia para rechazar este ajuste considerando un nivel de significancia del 5 %? **NO** **[0.3 Ptos.]**

Nota: si valor-p es incorrecto, pero la respuesta es correcta para ese valor-p asignar [0.3 Ptos.]

Pregunta 9

```
Data = rio::import("SINCA2022.xlsx")
X = dplyr::filter(Data,  MONTH == 6)$O3
Y = dplyr::filter(Data,  MONTH == 7)$O3
var.test(x = X, y = Y)$p.value
[1] 0.6056479
## No se rechaza la hipótesis de varianzas iguales
```

[0.2 Ptos.]

```
t.test(x = X, y = Y, alternative = "two.sided", var.equal  = T)$p.value
[1] 0.01296223
## Se rechaza la hipótesis de igualdad de medias
```

[0.6 Ptos.]

Respuesta: **SI** **[0.2 Ptos.]**

Nota: Si entrega valor-p igual a 0.0132195 (var.equal = F) descontar los [0.2 Ptos] del var.test. Si la respuesta es coherente al valor-p calculado por el alumno, asignar de todas maneras [0.2 Ptos.] por interpretación.

Pregunta 10

```
n = length(dplyr::filter(Data,  MONTH == 1)$T.MIN<14)
X = sum(dplyr::filter(Data,  MONTH == 1)$T.MIN<14)
p0 = 1/3
TeachingDemos::z.test(x = X/n, mu = p0, stdev = sqrt(p0*(1-p0)/n), alternative = "less")$p.value
[1] 0.06218344
prop.test(x = X, n = n, p = p0, alternative = "less", correct = F)$p.value
[1] 0.06218344
prop.test(x = X, n = n, p = p0, alternative = "less", correct = T)$p.value
[1] 0.07292098
```

[0.7 Ptos.]

Respuesta: **SI** **[0.3 Ptos.]**

Nota: si valor-p es incorrecto, pero la respuesta es correcta para ese valor-p asignar [0.3 Ptos.]

Pregunta 11

```
X = dplyr::filter(Data, MONTH == 2)$PM2.5
par = fitdistrplus::fitdist(X, distr = "lnorm", method = "mme")$estimate
par
  meanlog     sdlog
2.9412839 0.3577064
```

[0.4 Ptos.]

```
O = c(39,45,35,15,15)
p = diff(plnorm(c(0,15,20,25,30,Inf), meanlog = par[1], sdlog = par[2]))
X2 = chisq.test(x = O, p = p)$statistic
1-pchisq(X2, df = 5-1-2)
0.7411114
```

[0.4 Ptos.]

¿Existe evidencia para rechazar este ajuste considerando un nivel de significancia del 5 %? **NO** **[0.2 Ptos.]**

Nota: Si estima por mle no descontar puntaje. Si valor-p es incorrecto, pero la respuesta es correcta para ese valor-p asignar [0.2 Ptos.] en la conclusión

Pregunta 12

```
fit01 = lm(O3 ~ T.MIN , data = Data)
fit02 = lm(O3 ~ T.MEAN, data = Data)
fit03 = lm(O3 ~ T.MAX , data = Data)

summary(fit01)$r.squared
[1] 0.4233103
summary(fit02)$r.squared ## Mejor modelo
[1] 0.6769268
summary(fit03)$r.squared
[1] 0.6575928

fit01$coef[2]*2
   T.MIN
2.366469
fit02$coef[2]*2
  T.MEAN
2.573245
fit03$coef[2]*2
   T.MAX
2.052748
```

¿Cuál de las tres temperaturas presenta una mejor capacidad predictiva de manera individual? **T.MEAN** **[0.5 Ptos.]**

¿En cuánto varía el nivel esperado de ozono si la mejor temperatura utilizada como regresor aumentara 2 grados Celsius? **2.573245** **[0.5 Ptos.]**

Nota: Si el nivel esperado está en linea con el mejor modelo asignar [0.5 Ptos] aunque el modelo no sea el de mejor ajuste