Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

Primer Semestre 2025

Curso : Probabilidad y Estadística
Sigla : EYP1113
Profesores : Ricardo Aravena C., Maritza Márquez N., Bladimir Morales T., Ricardo Olea O., Jose Ordoñez C. y Hernán Robledo A.

INTERROGACIÓN 3

Pregunta 1

Durante los días de lluvia en Santiago, se ha observado que las condiciones de temperatura y humedad relativa pueden influir fuertemente en la percepción térmica de las personas. En particular, se sospecha que cuando la humedad es alta, incluso temperaturas moderadas pueden sentirse frías.

Con el objetivo de estudiar estas condiciones, se modela el comportamiento conjunto de la temperatura promedio diaria X (en grados Celsius) y la humedad relativa promedio diaria Y (en porcentaje) mediante una distribución Normal Bivariada:

$$(X, Y)' \sim \text{Normal Bivariada}(\mu_X = 11,\, \mu_Y = 85,\, \sigma_X = 2,\, \sigma_Y = 5,\, \rho = -0.6)$$

Esta modelación busca capturar la relación inversa que suele observarse entre estos dos factores durante eventos de precipitación.

(a) **[2.0 ptos]** Calcule la probabilidad de que la temperatura promedio de un día sea inferior a $10°C$, dado que la humedad relativa promedio fue del 75 %.

(b) **[2.0 ptos]** Obtenga la mejor predicción de la humedad relativa promedio para un día en que la temperatura promedio sea de $10°C$.

(c) **[2.0 ptos]** La siguiente fórmula define un índice meteorológico que refleja la sensación de "frío húmedo":

$$Z = \frac{e^{0.6\,X + 0.4\,Y - 40}}{1 + e^{0.6\,X + 0.4\,Y - 40}}$$

Este índice varía entre 0 y 1, y aumenta cuando suben la temperatura y la humedad. Así, valores cercanos a 0 indican condiciones más frías y húmedas. Calcule la probabilidad de que $Z > 0.6$.

Solución

(a) Se pide $\text{P}(X < 10 \mid Y = 75)$. Del formulario se tiene que la distribución condicional de $X \mid Y = 75$ está dada por

$$X \mid Y = 75 \sim \text{Normal}\left(\mu_X + \rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(75 - \mu_Y),\; \sigma_X\sqrt{1 - \rho^2}\right).$$

Sustituyendo valores:

$$X \mid Y = 75 \sim \text{Normal}\left(11 + (-0.60)\frac{2}{5}\,(75 - 85)\,,\; 2\sqrt{1 - (0.6^2)}\right).$$

$$X \mid Y = 75 \sim \text{Normal}\,(13.4, 1.6)\,.$$

Así,

$$\mathsf{P}(X < 10 \mid Y = 75) = \Phi\left(\frac{10 - 13.4}{1.6}\right) = \Phi(-2.125) = 1 - \Phi(2.125) \approx 1 - \Phi(2.12) = 1 - 0.983 = 0.017$$

(b) La mejor predicción de la humedad relativa corresponde a la $\mathsf{E}[Y \mid X = 10]$. Por formulario se tiene que

$$\mathsf{E}[Y \mid X = 10] = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(10 - \mu_X) = 85 + (-0.6) \cdot \frac{5}{2}(-1) = 85 + 1.5 = 86.5$$

(c) Sea $W = 0.6X + 0.4Y - 40$. Se pide

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(Z > 0.6\right) &= \mathsf{P}\left(\frac{e^W}{1 + e^W} > 0.6\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\frac{1}{1 + e^{-W}} > 0.6\right) \\
&= \mathsf{P}\left(e^{-W} < \frac{1}{0.6} - 1\right) \\
&= \mathsf{P}\left(W > -\log\left(\frac{1}{0.6} - 1\right)\right) \\
&= \mathsf{P}\left(W > 0.405\right) = 1 - F_W(0.405)
\end{aligned}$$

Como W es una combinación lineal de variables aleatorias con distribución normal, se tiene que

$$W \sim \mathsf{Normal}\left(\mathsf{E}(W), \sqrt{\mathsf{Var}(W)}\right)$$

Así,

$$\mathsf{E}(W) = \mathsf{E}(0.6X + 0.4Y - 40) = 0.6\mathsf{E}(X) + 0.4\mathsf{E}(Y) - 40 = 0.6 \cdot 11 + 0.4 \cdot 85 - 40 = 0.6$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{Var}(W) &= \mathsf{Var}((0.6X + 0.4Y - 40)) \\
&= 0.6^2\mathsf{Var}(X) + 0.4^2\mathsf{Var}(Y) + 2 \cdot 0.6 \cdot 0.4\mathsf{Cov}(X, Y) \\
&= 0.36 \cdot 4 + 0.16 \cdot 25 + 2 \cdot 0.6 \cdot 0.4\mathsf{Corr}(X, Y)\sqrt{\mathsf{Var}(X)\mathsf{Var}(Y)} \\
&= 1.44 + 4 + 0.48\rho\sqrt{4 \cdot 25} \\
&= 5.44 + 0.48(-0.60)10 \\
&= 2.56
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathsf{P}\left(Z > 0.6\right) = 1 - F_W(0.405) = 1 - \Phi\left(\frac{0.405 - 0.6}{\sqrt{2.56}}\right) = 1 - \Phi\left(-0.12\right) = 1 - (1 - \Phi\left(0.12\right) = 0.5478$$

Como solución alternativa y equivalente, se puede utilizar que $L = e^{-W} \sim \mathsf{LogNormal}(-\mathsf{E}(W), \sqrt{\mathsf{Var}(W)})$ para calcular $\mathsf{P}(L < 2/3)$.

Asignación de Puntaje:

(a)

Logro 1 [1.5 ptos]: Identifica correctamente que se trata de una distribución normal condicional y plantea correctamente sus parámetros.

- [0.5 pto] por reconocer que se trata de una normal condicional $X \mid Y = y$.
- [0.5 pto] por calcular correctamente la media condicional $\mu_{X|Y}$.
- [0.5 pto] por calcular correctamente la desviación estándar condicional $\sigma_{X|Y}$.

Logro 2 [0.5 ptos]: por calcular correctamente la probabilidad condicional utilizando la distribución normal.

(b)

Logro 3 [1 ptos]: por reconocer que el mejor predictor es la esperanza condicional de $Y|X$.

Logro 4 [1 ptos]: por reconocer que E$(Y \mid X) = 86.5$.

(c)

Logro 5 [1.0 ptos]: por mostrar que $W \sim$ Normal $\left(\mu_W = 0.6, \sigma_W = \sqrt{2.56} = 1.6\right)$.

- [0.3 pto] por indicar que combinación lineal de normales sigue una distribución normal.
- [0.3 pto] por calcular correctamente μ_W.
- [0.4 pto] por calcular correctamente σ_W

Logro 6 [1.0 ptos]: por obtener que P$(Z > 0.6) = 0.5478$.

- [0.5 pto] por estrategia para desarrollar P$(Z > 0.6)$.
  - Puede ser la escrita en la pauta, o usar que e^{-W} es una LogNormal, u otra estrategia.
- [0.5 pto] por obtener que P$(Z > 0.6) = 0.5478$.

Pregunta 2

El frente de mal tiempo que afectará a Santiago esta semana traerá precipitaciones superiores a 80 mm, lo que genera preocupación por posibles anegamientos, entendidos como la saturación de los suelos con agua. Estudios sobre el comportamiento del canal Santa Marta indican que el flujo (en metros por segundo, m/s) y la remoción de masa (en metros cúbicos por hora, m^3/h) podrían provocar anegamientos en amplios sectores de la comuna de Maipú.

Expertos señalan que el flujo del canal, que varía entre 2 m/s y 16 m/s, se modela como una variable aleatoria Beta con parámetros $q = 2$ y $r = 1$. Además, dado que mayores flujos arrastran una mayor masa de tierra, se establece que, para un flujo de X m/s, la remoción de masa se comporta como una variable aleatoria Gamma$(k = 9,\, \nu = 1/X)$.

Determine el coeficiente de correlación entre el flujo del canal y la remoción de masa.

Solución

Se pide la correlación Corr(X, Y). Desarrollándola:

$$\begin{aligned}\mathsf{Corr}(X,Y) &= \frac{\mathsf{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{Var}(X)\mathsf{Var}(Y)}} \\ &= \frac{\mathsf{E}(XY) - \mathsf{E}(X)\mathsf{E}(Y)}{\sqrt{\mathsf{Var}(X)\mathsf{Var}(Y)}}\end{aligned}$$

Del enunciado se extrae que $X \sim$ Beta$(2, 1)$ con soporte en $(a, b) = (2, 16)$. Así, del formulario se obtiene que $\mathsf{E}(X) = 34/3$ y $\mathsf{Var}(X) = 98/9$.

Del enunciado se tiene que $Y|X = x \sim$ Gamma$(k = 9, \nu = 1/X)$. Para calcular $\mathsf{E}(Y)$, $\mathsf{Var}(Y)$ y $\mathsf{E}(XY)$ usamos los teoremas de esperanza y varianza iterada.

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(Y) &= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}\left(Y \mid X\right)\right) \\ &= \mathsf{E}\left(\frac{9}{1/X}\right) \\ &= \mathsf{E}\left(9X\right) \\ &= 9 \cdot \mathsf{E}(X) = 9 \cdot \frac{34}{3} = 102\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{Var}(Y) &= \mathsf{E}(\mathsf{Var}(Y \mid X)) + \mathsf{Var}\left(\mathsf{E}\left(Y \mid X\right)\right) \\ &= \mathsf{E}\left(9 \cdot X^2\right) + \mathsf{Var}\left(9 \cdot X\right) \\ &= 9\left(\mathsf{Var}(X) + \mathsf{E}(X)^2\right) + 81 \cdot \mathsf{Var}\left(X\right) \\ &= 90 \cdot \mathsf{Var}(X) + 9 \cdot \mathsf{E}(X)^2 \\ &= 90 \cdot \frac{98}{9} + 9 \cdot \frac{1156}{9} = 2136\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(XY) &= \mathsf{E}\left(\mathsf{E}(XY \mid X)\right) = \mathsf{E}\left(X \cdot \mathsf{E}(Y \mid X)\right) \\ &= \mathsf{E}\left(X \cdot 9 \cdot X\right) = 9\mathsf{E}\left(X^2\right) \\ &= 9\left(\mathsf{Var}(X) + \mathsf{E}(X)^2\right) = 9 \cdot \frac{98}{9} + 9 \cdot \frac{1156}{9} = 1254\end{aligned}$$

Reuniendo los resultados obtenemos el valor de la correlación.

$$\begin{aligned}\text{Corr}(X,Y) &= \frac{\text{E}(XY) - \text{E}(X)\text{E}(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \\ &= \frac{1254 - (34/3)(102)}{\sqrt{(98/9)(2136)}} = 0.642\end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

Logro 1 [1.0 ptos]: por obtener

- [0.5 pto] $\text{E}(X) = 34/3$
- [0.5 pto] $\text{Var}(X) = 98/9$.

Logro 2 [1.0 ptos]: por calcular $\text{E}(Y) = 102$.

- [0.5 pto] por mostrar uso de Teorema de esperanza iterada.
- [0.5 pto] por obtener el valor correcto $\text{E}(Y) = 102$.

Logro 3 [2 ptos]: por calcular $\text{Var}(Y) = 2136$.

- [0.5 pto] por mostrar uso de Teorema de varianza iterada.
- [1.5 pto] por obtener el valor correcto $\text{Var}(Y) = 2136$.

Logro 4 [1.5 ptos]: por calcular $\text{E}(XY) = 1254$.

- [0.5 pto] por mostrar uso de Teorema de varianza iterada.
- [1.0 pto] por obtener el valor correcto $\text{E}(XY) = 1254$.

Logro 5 [0.5 ptos]: por calcular la correlación, $\text{Cor}(X,Y) = 0.642$.

Pregunta 3

Una compañía que vende muebles para el hogar gestiona las quejas de sus clientes a través de un Centro de Atención Telefónica. Este centro cuenta con dos empleados: A y B. Cuando entra una llamada, A la contesta inicialmente y, si se trata de una solicitud de cambio de producto, la deriva a B para que continúe con la atención. Considerando únicamente las llamadas relacionadas con cambios de producto, se observa que el tiempo (en minutos) que A dedica a cada cliente es una variable aleatoria X que sigue una distribución Exp(1). Asimismo, el tiempo que B dedica es una variable aleatoria Y, que también sigue una distribución Exp(1), siendo X independiente de Y.

Con el objetivo de analizar cuán eficiente es A al derivar las llamadas a B, se seleccionó una muestra aleatoria de 10 clientes que solicitaron cambios de producto. Para el cliente i, la duración total de la atención es $X_i + Y_i$, y se define la proporción del tiempo que A dedica al cliente i, junto con el promedio de estas proporciones, como:

$$Z_i = \frac{X_i}{X_i + Y_i}, \qquad \overline{Z} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} Z_i.$$

(a) **[3.0 ptos]** Demuestre que $Z_i \sim$ Uniforme$(0, 1)$.

(b) **[2.0 ptos]** Encuentre la distribución aproximada de $\overline{Z}$.

(c) **[1.0 ptos]** Obtenga la probabilidad aproximada de que el promedio de diez proporciones de tiempo que A dedica a los clientes sea mayor a 0.60.

Solución

(a) Para demostrar que $Z_i \sim$ Uniforme$(0, 1)$ verificaremos que $f_Z(z) = 1$ para $z \in (0, 1)$. Para $Z = g(X, Y)$ se tiene del formulario que

$$f_Z(z) = \int_0^\infty f_{X,Y}(g^{-1}, y) \left| \frac{\partial}{\partial z} g^{-1} \right| dy,$$

donde la integral va desde 0 hasta infinito debido a que Y tiene soporte en $(0, \infty)$.

Despejando x de $g(x, y)$ para encontrar g^{-1} y luego derivándola respecto a z obtenemos

$$g^{-1} = x = y\frac{z}{1-z}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} g^{-1} = \frac{y}{(1-z)^2}$$

Como X e Y son independientes, entonces

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = e^{-x} e^{-y}.$$

Reemplazando en la fórmula de $f_Z(z)$, te:

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^\infty e^{-(yz/(1-z))} e^{-y} \frac{y}{(1-z)^2} dy. \\
&= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{yz}{1-z} - \frac{y(1-z)}{1-z}\right) \frac{y}{(1-z)^2} dy \\
&= \frac{1}{(1-z)^2} \int_0^\infty y \exp\left(-\frac{y}{1-z}\right) dy \\
&= \frac{1}{(1-z)^2} \frac{\Gamma(2)}{(1/(1-z))^2} \int_0^\infty \frac{(1/(1-z))^2}{\Gamma(2)} y^{2-1} \exp\left(-\frac{y}{1-z}\right) dy \\
&= \frac{1}{(1-z)^2} (2-1)!(1-z)^2 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

Como X y Y siguen una distribución exponencial, su soporte es en $(0, \infty)$. Luego, $Z \in (0, 1)$. Así, se tiene que $f_Z(z) = 1$ para $z \in (0, 1)$, lo cual corresponde a la función de densidad de una variable aleatoria Uniforme$(0, 1)$.

(b) Como $Z_1, \ldots, Z_{10} \overset{\text{i.i.d}}{\sim}$ Uniforme$(0, 1)$, entonces:

$$\mathsf{E}(Z_i) = \frac{1}{2}, \qquad \mathsf{Var}(Z_i) = \frac{1}{12}.$$

Por el Teorema Central del Límite, el promedio $\overline{Z} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} Z_i$ se aproxima a una distribución normal:

$$\overline{Z} \overset{\text{aprox.}}{\sim} \text{Normal}\left(\mu = \frac{1}{2},\, \sigma = \sqrt{\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{12}} = \sqrt{\frac{1}{120}}\right).$$

(c) Se desea calcular la probabilidad $P(\overline{Z} > 0.60)$. Usando el resultado de b):

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\overline{Z} > 0.60\right) &= \mathsf{P}\left(\frac{\overline{Z} - 1/2}{\sqrt{1/120}} > \frac{0.60 - 1/2}{\sqrt{1/120}}\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\frac{\overline{Z} - 1/2}{\sqrt{1/120}} > 1.095\right) \\
&\approx 1 - \Phi(1.09) = 1 - 0.8621 = 0.1379
\end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

(a)

Logro 1 [1 ptos]: por reconocer uso de $f_Z(z) = \int f_{X,Y}(g^{-1}, y)|\partial/\partial z g^{-1}|dy$ o $f_Z(z) = \int f_{X,Y}(x, g^{-1})|\partial/\partial z g^{-1}|dx$ para resolver el ejercicio, con $g(x, y) = x/(x + y)$.
Logro 2 [1 ptos]: por obtener $f_{X,Y}(x, y)$ y $\partial/\partial z\ g^{-1}$.

- [0.5 pto] por obtener que, por independencia, $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$.
- [0.5 pto] por obtener que $\partial/\partial z g{-}1 = y/(1 - z)^2$ si despejó x, o por obtener $\partial/\partial z g{-}1 = -x/z^2$ si despejó y.

Logro 3 [1 ptos]: por resolver la integral y obtener que $f_Z z = 1$.

- [0.5 ptos] por correcto.
- [0.5 pto] por conclusión.

(b)

Logro 4 [1 ptos]: por asociar el Teorema del Límite Central a la distribución aproximada de $\overline{Z}$.

Logro 5 [1 ptos]: por obtener que $\mu = 1/2$ y $\sigma = \sqrt{1/120})$.

- [0.5 pto] por indicar que $\mu = 1/2$.
- [0.5 pto] por indicar que $\mu = \sqrt{1/120} = 0.0912$.

(c)

Logro 6 [1 ptos]: por obtener que $\mathsf{P}\left(\overline{Z} > 0.6\right) = 0.1379$.

- [0.8 pto] por desarrollo de cálculo bajo una variable aleatoria normal.
- [0.2 pto] por obtener $\mathsf{P}\left(\overline{Z} > 0.6\right) = 0.1379$.

Pregunta 4

Una empresa embotelladora de agua realiza un monitoreo constante de dos aspectos críticos en su línea de producción:

- Volumen de llenado: Cada hora se seleccionan aleatoriamente n botellas de una máquina de llenado y se registra el volumen real de agua para cada una $V_1, \ldots, V_n$ (en ml). Se asume $V_i \overset{\text{i.i.d}}{\sim}$ Normal(μ, σ), donde μ es el volumen promedio de llenado y σ es la desviación estándar del proceso (conocida).
- Tiempo hasta falla: Desde que la máquina termina de llenar un conjunto de n botellas, se mide el tiempo T_i (en horas) hasta que ocurre un desajuste que requiere mantenimiento. Se asume que $T_i \overset{\text{i.i.d.}}{\sim}$ Exp(λ), donde $\lambda > 0$ es la tasa de desajustes de la máquina.

Se proponen cuatro estimadores para los modelos anteriores: dos para el volumen promedio de llenado (μ) y dos para la tasa de desajuste de las máquinas (λ). Estos estimadores se dan a continuación:

$$\widehat{\mu}_1 = \overline{V}, \qquad \widehat{\mu}_2 = \left(\frac{n-1}{n}\right)\overline{V}, \qquad \widehat{\lambda}_1 = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} T_i}, \qquad \widehat{\lambda}_2 = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\overline{T}} - \frac{1}{n}.$$

(a) **[2.0 ptos]** Determine si los estimadores propuestos son insesgados.

(b) **[1.0 ptos]** Obtenga los Errores Cuadráticos Medios de $\widehat{\mu}_1$ y $\widehat{\mu}_2$. Determine si los estimadores son consistentes.

(c) **[1.0 ptos]** Obtenga las varianzas aproximadas de primer orden de los estimadores $\widehat{\lambda}_1$ y $\widehat{\lambda}_2$. Utilice estas y lo obtenido en (a) para calcular el Error Cuadrático Medio. Determine si los estimadores son consistentes.

(d) **[2.0 ptos]** Indique cuál estimador de μ es más eficiente. Justifique su respuesta.

Solución

(a) Verificar si un estimador es insesgado es verificar si ocurre que $\mathsf{E}(\hat{\theta}) = \theta$. Para el volumen promedio, μ:

$$E(\widehat{\mu}_1) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(V_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu \quad \Rightarrow \quad \text{Insesgado}$$

$$E(\widehat{\mu}_2) = E\left(\frac{n-1}{n}\overline{V}\right) = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot n\mu = \left(\frac{n-1}{n}\right)\mu \quad \Rightarrow \quad \text{Sesgado}$$

Para la tasa de desajuste, λ, como $T_i \sim$ Exp(λ), entonces $S = \sum_{i=1}^{n} T_i \sim$ Gamma (n, λ).

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(\widehat{\lambda}_1) &= \mathsf{E}\left(\frac{n-1}{S}\right) = (n-1)\mathsf{E}\left(\frac{1}{S}\right) \\
&= (n-1)\int_0^\infty \frac{1}{s}\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} s^{n-1} e^{-\lambda s} ds \\
&= \frac{(n-1)\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty s^{(n-1)-1} e^{-\lambda s} ds \\
&= \frac{(n-1)\lambda^n}{\Gamma(n)}\frac{\Gamma(n-1)}{\lambda^{n-1}}\int_0^\infty \frac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)} s^{(n-1)-1} e^{-\lambda s} ds \\
&= \frac{(n-1)\lambda^n}{\Gamma(n)}\frac{\Gamma(n-1)}{\lambda^{n-1}}\cdot 1 = \lambda\cdot\frac{(n-1)(n-2)!}{(n-1)!} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \text{Insesgado}
\end{aligned}$$

$$E(\widehat{\lambda}_2) = E\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\overline{T}} - \frac{1}{n}\right) = E\left(\frac{n-1}{S} - \frac{1}{n}\right) = E\left(\frac{n-1}{S} - \frac{1}{n}\right) = \lambda - \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad \text{Sesgado}$$

(b) El Error Cuadrático Medio corresponde a $\text{ECM}(\hat{\theta}) = \text{Var}(\hat{\theta}) + \left(\text{E}(\hat{\theta}) - \theta\right)^2$. Un estimador es consistente si $\lim_{n\to\infty} \text{ECM}(\hat{\theta}) = 0$.

De (a) ya se tienen $\text{E}(\hat{\mu}_1)$ y $\text{E}(\hat{\mu}_2)$. Calculamos las varianzas y verificamos si los estimadores son consistenes.

$$\text{Var}(\widehat{\mu}_1) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \text{Sesgo} = 0$$

$$\text{ECM}(\widehat{\mu}_1) = \frac{\sigma^2}{n} + 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \widehat{\mu}_1 \text{ es consistente.}$$

$$\text{Var}(\widehat{\mu}_2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n}, \quad \text{Sesgo} = -\frac{\mu}{n}$$

$$\text{ECM}(\widehat{\mu}_2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{-\mu}{n}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \widehat{\mu}_2 \text{ es consistente.}$$

(c) Repetimos el procedimiento de (b), pero esta vez calculando las varianzas mediante la aproximación de primer orden. La varianza de un estimador $\hat{\theta} = g(T)$ bajo esta aproximación está dada por:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \approx \text{Var}(T) \left[\frac{d}{dx} g(\mu_T)\right]^2.$$

En nuestro caso, se tiene que $\hat{\lambda}_1 = g(S) = (n-1)/S$, donde $S = \sum_{i=1}^n T_i$. Además, $g'(S) = \frac{-(n-1)}{S^2}$, y, como $S \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$,

$$\mu_S = \text{E}(S) = \frac{n}{S}$$

$$\text{Var}(S) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n T_i\right) = \frac{n}{\lambda^2}$$

Sustituyendo en la fórmula de la varianza de primer orden, obtenemos:

$$\text{Var}(\hat{\lambda}_1) \approx \text{Var}(S) \left(\frac{d}{dx} g(\mu_S)\right)^2 = \frac{1}{n\lambda^2} \left(\frac{-(n-1)}{n/\lambda}\right)^2 = \lambda^2 \frac{(n-1)^2}{n^3}$$

Finalmente, como este estimador es insesgado por (a), su Error Cuadrático Medio (ECM) coincide con su varianza. Además, es consistente, ya que:

$$\lim_{n\to\infty} \text{ECM}(\hat{\lambda}_1) = \lambda^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n-1)^2}{n^3}\right) = 0.$$

Similarmente, notar que $\hat{\lambda}_2 = g(T) - 1/n$. Por esto, $\text{Var}\left(\hat{\lambda}_2\right) = \text{Var}\left(\hat{\lambda}_1\right) = \lambda^2(n-1)^2/n^3$. Sin embargo, según (a) este estimador es sesgado. A pesar de ello, sigue siendo un estimador consistente ya que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \text{ECM}(\hat{\lambda}_1) &= \lim_{n\to\infty} \left[\text{Var}\left(\hat{\lambda}_2\right) + \left(\text{E}(\hat{\lambda}_) - \lambda\right)^2\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\text{Var}\left(\hat{\lambda}_1\right)\right] + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0\end{aligned}$$

(d) Un estimador es más eficiente cuando posee un Error Cuadrático Medio que el segundo. En este caso, $\hat{\mu}_1$ es más eficiente que $\hat{\mu}_2$ ya que

$$\text{ECM}(\widehat{\mu}_1) = \frac{\sigma^2}{n} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n} + \left(\frac{-\mu}{n}\right)^2 = \text{ECM}(\widehat{\mu}_2)$$

Asignación de Puntaje:

(a)

Logro 1 [2 ptos]: por establecer correctamente si los estimadores son insesgados o sesgados.

- [0.5 pto] por mostrar que $\hat{\mu}_1$ es insesgado.
- [0.5 pto] por mostrar que $\hat{\mu}_2$ es sesgado.
- [0.5 pto] por mostrar que $\hat{\lambda}_1$ es insesgado.
- [0.5 pto] por mostrar que $\hat{\lambda}_2$ es sesgado.

Para cada caso, asignar [0.4 pto] por procedimiento y [0.1 pto] por conclusión correcta.

(b)

Logro 2 [0.8 ptos]: por obtener los Errores Cuadráticos Medios de los estimadores.

- [0.4 ptos] por obtener Error Cuadrático Medio de $\hat{\mu}_1$.
- [0.4 ptos] por obtener Error Cuadrático Medio de $\hat{\mu}_2$.

Logro 3 [0.2 ptos]: por establecer correctamente la consistencia de los estimadores.

- [0.1 ptos] por mostrar que $\hat{\mu}_1$ es consistente.
- [0.1 ptos] por mostrar que $\hat{\mu}_2$ es consistente.

(c)

Logro 4 [0.8 ptos]: por obtener los Errores Cuadráticos Medios de los estimadores.

- [0.4 ptos] por obtener Error Cuadrático Medio de $\hat{\lambda}_1$.
- [0.4 ptos] por obtener Error Cuadrático Medio de $\hat{\lambda}_2$.

Para ambos casos, asignar

- [0.3 ptos] por uso de fórmula de varianza de primer orden
- [0.2 ptos] por obtener Var(T)
- [0.1 ptos] por obtener $d/dx\ g(\mu_T)$
- [0.1 ptos] por obtener la varianza correcta
- [0.1 ptos] por obtener el sesgo correcto.

Logro 5 [0.2 ptos]: por establecer correctamente la consistencia de los estimadores.

- [0.1 ptos] por mostrar que $\hat{\lambda}_1$ es consistente.
- [0.1 ptos] por mostrar que $\hat{\lambda}_2$ es consistente.

(d)

Logro 6 [2.0 ptos]: por mostrar que $\hat{\mu}_1$ es más eficiente que $\hat{\mu}_2$.

- [1.0 ptos] por indicar que para identificar eficiencia se comparan los Errores Cuadráticos Medios.
- [1.0 ptos] por concluir correctamente.